Übungen zur Quantentheorie (Diplomstudiengang)

WS 97/98 Blatt 6

Aufgabe 6.1 (25 Punkte): Kräftefreies Teilchen in Drehimpulsdarstellung

Die Frage nach Lösungen der kräftefreien zeitunabhängigen Schrödingergleichung, die zugleich Drehimpulseigenfunktionen, d.h. von der Form $\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r} f_l(r) Y_{lm}(\hat{r})$ sind, führt auf die radiale Schrödingergleichung

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + 1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right) f_l(\rho) = 0 \qquad \left(\rho = kr; \quad E = \tfrac{\hbar^2 k^2}{2m}\right). \qquad (*)$$

a) Wiederholen Sie die radiale Schrödinger-Gleichung und zeigen Sie, dass diese für $V = 0$ in der dimensionslosen Variable ρ die Form $(*)$ annimmt.

b) Zeigen Sie durch Induktion nach l, dass die beiden Funktionen

$$\hat{\jmath}_l(\rho) = \rho^{l+1}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \left(\frac{\sin\rho}{\rho}\right) \qquad \text{(Riccati-Bessel-Funktion)}$$

$$\hat{n}_l(\rho) = \rho^{l+1}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \left(\frac{\cos\rho}{\rho}\right) \qquad \text{(Riccati-Neumann-Funktion)}$$

Lösungen dieser Dgl. sind. Hinweis: Schreiben Sie $\hat{\jmath}_l(\rho) = \rho^{l+1} u_l(\rho)$, stellen Sie die Dgl. für u_l auf und zeigen Sie, dass $-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} u_l$ die Dgl. für u_{l+1} erfüllt (analog für $\hat{n}_l$).

c) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von $\hat{\jmath}_l, \hat{n}_l$ für $\rho \to \infty$ und für $\rho \to 0$. Hinweis: Überlegen Sie, welche der beim Ausführen von $\left(-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l$ entstehenden Terme in dem jeweiligen Grenzfall führend werden! Was folgt demnach aus der Randbedingung $f_l(0) = 0$?

d) Schreiben Sie die Entwicklung einer allgemeinen Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$ nach dem so konstruierten System uneigentlicher Eigenfunktionen von $T = \frac{1}{2m}P^2$,l^2 und l_z. Wie vereinfacht sich diese Entwicklung, wenn $\psi(\vec{x})$ eine ebene Welle, das heißt selbst bereits Eigenfunktion von T ist?