Übungen zur Quantentheorie (Diplomstudiengang)

WS 97/98 Blatt 5

Aufgabe 5.1 (4 Punkte): Operator-Adjungierte

Sei A ein linearer Operator und $A^\dagger$ sein Adjungiertes, beide definiert auf ganz $\mathcal{H}$. Zeigen Sie:

a) der Operator $A^\dagger A$ ist selbstadjungiert;

b) der Operator $A^\dagger A$ ist positiv-semidefinit, d.h. er besitzt nur nichtnegative Erwartungswerte.

Aufgabe 5.2 (11 Punkte): Beispiele für Projektoren

Geben Sie für folgende Projektionen einen entsprechenden Operator an:

a) Projektionen eines Elements des $\mathbb{R}^3$ in die $x-y-$Ebene bzw. auf die $z-$Achse, vermittelt durch eine $3 \times 3-$Matrix.

b) Projektionen der Funktionen $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ auf die Teilmengen der geraden und ungeraden Funktionen. *Hinweis:* Benutzen Sie den Paritäts-Operator.

c) Projektion der komplexwertigen periodischen Funktionen mit Periode $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ auf den Unterraum der mit $3\omega_0$ harmonisch oszillierenden Funktionen. *Hinweis:* Betrachten Sie die Fourier-Reihen der periodischen Funktionen.

Aufgabe 5.3 (16 Punkte): Projektoren

a) Π_1, Π_2 seien die Projektoren auf die beiden Unterräume $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ von $\mathcal{H}$. Man schreibt $\Pi_1 < \Pi_2$, wenn $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, d.h. $\Pi_1 \Pi_2 = \Pi_1$ ist. Zeigen Sie: $\Pi_1 \leq \Pi_2$ gilt genau dann, wenn $\langle\psi| \Pi_1 |\psi\rangle \leq \langle\psi| \Pi_2 |\psi\rangle$ für alle $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.
Hinweis: Benutzen Sie eine geeignete ONB von $\mathcal{U}_2$.

b) Zeigen Sie, dass eine Summe $\sum_{i=1}^N \Pi_i$ von Projektoren genau dann wieder ein Projektor ist, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^N \langle\psi| \Pi_i |\psi\rangle \leq \langle\psi |\psi\rangle \qquad \text{für alle} \qquad |\psi\rangle \in \mathcal{H}.$$

Hinweis: Zeigen Sie im Fall der Gültigkeit dieser Ungleichung („Rückrichtung“), dass dann die Π_i auf paarweise orthogonale Räume projizieren.