Übungen zur Quantentheorie (Diplomstudiengang)

WS 97/98 Blatt 4

Aufgabe 4.1 (16 Punkte): Quantenmechanische Zweiteilchenprobleme

a) Rechnen Sie den Operator der kinetischen Energie eines Zweiteilchensystems, $T = \frac{1}{2m_1}(\frac{\hbar}{\imath}\vec{\nabla}^{(1)})^2 + \frac{1}{2m_2}(\frac{\hbar}{\imath}\vec{\nabla}^{(2)})^2$ auf die Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\vec{X} = \frac{m_1\vec{x}^{(1)}+m_2\vec{x}^{(2)}}{M}, \qquad \vec{x} = \vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(1)} \qquad (M = m_1 + m_2)$$

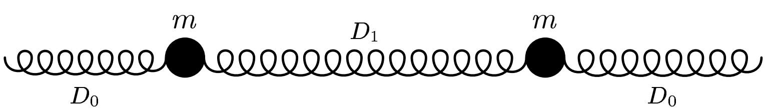
um. Geben Sie auch die Umrechnung des Volumenelementes $d^3\vec{x}^{(1)}d^3\vec{x}^{(2)}$ auf $\vec{X}$ und $\vec{x}$ an.

Hinweis: Verwenden Sie die Bezeichnung $\mu := \frac{m_1 m_2}{M}$ (reduzierte Masse). Es genügt, die Umrechnung für eine der drei kartesischen Richtungen anzugeben.

b) Formulieren Sie den Hamilton-Operator H des Wasserstoffatoms bei Berücksichtigung der Mitbewegung des Kerns (endliche Protonenmasse m_p) und drücken Sie ihn in den Koordinaten von a) aus.

Geben Sie eine H-Eigenfunktion und die dazugehörige Energie für ein Atom an, welches sich im inneren Zustand mit den Quantenzahlen (N, l, m) befindet und zugleich als Ganzes mit der Geschwindigkeit $\vec{V}_0$ durch den Raum diffundiert.

c) Zwei eindimensionale harmonische Oszillatoren mit identischer Masse m und Federkonstante $D_0 = m\omega_0$ sind durch eine Feder mit Federkonstante $D_1 = m\omega_1$ aneinander gekoppelt.



Stellen Sie den Hamilton-Operator des Systems auf, drücken Sie ihn in den Koordinaten von a) aus und zeigen Sie, dass er in zwei kommutierende additive Teile zerfällt. Geben Sie einen vollständigen Satz von Produkteigenfunktionen und zugehörigen Energieeigenwerten an.