Übungen zur Quantentheorie (Diplomstudiengang)

WS 97/98 Blatt 3

Aufgabe 3.1 (12 Punkte): Elektron im homogenen Magnetfeld

a) Zeigen Sie, dass die Potentiale $\vec{A}_0 = (0, B_0 x, 0)$, $\Phi = 0$ ein homogenes Magnetfeld der Stärke B_0 in z-Richtung beschreiben, und geben Sie die Eichtransformation an, die das in der Vorlesung benutzte $\vec{A}'_0 = \frac{1}{2}\left(\vec{B}_0 \times \vec{x}\right)$ in $\vec{A}_0$ überführt. Die in der Vorlesung hergeleitete Schrödinger-Gleichung gilt lediglich für Vektorpotentiale in der Coulomb-Eichung. Erfüllt das Potential $\vec{A}_0$ diese Bedingung?

b) Stellen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für ein Elektron (Ladung $q = -e$) mit diesen Potentialen auf und reduzieren Sie diese durch den Separationsansatz

$$\psi(x, y, z) = e^{ik_z \cdot z} e^{ik_y \cdot y} u(x)$$

auf eine gewöhnliche Dgl. für $u(x)$.

c) Zeigen Sie, dass die Dgl. für u in der verschobenen Koordinate $x' = x + \frac{\hbar k_y}{e B_0}$ zur Schrödinger-Gleichung eines eindimensionalen harmonischen Oszillators mit der Frequenz $\omega_c = \frac{e B_0}{m}$ (Zyklotronfrequenz) wird. Damit können Sie einen vollständigen Satz von Produktlösungen und zugehörigen Energieeigenwerten (sog. Landau-Niveaus) angeben (vgl. Behandlung des harmonischen Oszillators in Physik IV).

Aufgabe 3.2 (15 Punkte): Normen und Skalarprodukte

a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Hilbert-Normen:

$$4 \langle \psi \,|\phi\rangle = \|\psi + \phi\|^2 - \|\psi - \phi\|^2 + i\,\|i\psi + \phi\|^2 - i\,\|i\psi - \phi\|^2$$

und

$$\|\psi + \phi\|^2 + \|\psi - \phi\|^2 = 2\,\|\psi\|^2 + 2\,\|\phi\|^2$$

(sogenannte Parallelogramm-Gleichung).

b) Beweisen Sie die Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle \phi \,|\psi\rangle| \leq \|\phi\| \cdot \|\psi\| \,.$$

Hinweis: Zerlegen Sie $|\psi\rangle$ in Komponenten parallel und senkrecht zu $|\phi\rangle$.

c) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung

$$|\|\psi\| - \|\phi\|| \leq \|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\| \,.$$

Hinweis: Zeigen Sie die 2. Ungleichung zuerst.