Übungen zur Quantentheorie (Diplomstudiengang)

WS 97/98 Blatt 2

Aufgabe 2.1 (20 Punkte): Teilchen im eindimensionalen δ-Potential

Ein eindimensionales δ-Potential ist gegeben durch $V(x) = -\alpha\delta(x)$.

a) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Wellenfunktion bei $x = 0$ einen Sprung besitzt, und berechnen Sie dessen Größe. Begründen Sie, dass $\psi(x)$ selbst stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass der Wahrscheinlichkeitsstrom $j(x)$ dennoch stetig in $x = 0$ ist.

c) Finden Sie Energie E_0 und Wellenfunktion $u_0(x)$ des gebundenen Zustandes.

d) Finden Sie alle symmetrischen bzw. antisymmetrischen Lösungen des kontinuierlichen Spektrums (Streulösungen) $u_k^{\pm}(x)$ für $E_k > 0$.

e) Berechnen Sie den Transmissionskoeffizienten T.

Aufgabe 2.2 (17 Punkte): Teilchen im eindimensionalen periodischen δ-Potential

Für ein Teilchen im periodischen Potential $V(x) = -\alpha\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta(x - ma)$ ergeben sich als Randbedingungen für eine Wellenfunktion der Form $\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$ mit $0 \leq x \leq a$ die Gleichungen

$$e^{-\hat{\imath}aK}(A\sin(ka) + B\cos(ka)) = B \tag{1}$$

$$kA - e^{-\hat{\imath}aK}(kA\cos(ka) - kB\sin(ka)) = -\tfrac{2m\alpha}{\hbar^2}B \tag{2}$$

a) Konsequenzen welcher Forderungen sind diese beiden Randbedingungen?

b) Der Sonderfall $k = 0$ wird durch obigen Ansatz nicht erfasst. Diskutieren Sie diesen Fall und geben Sie die zugehörige Lösung der Schrödinger-Gleichung an.

c) Diskutieren Sie die Lösungen der Schrödinger-Gleichung für die Fälle $ka \in \mathbb{N}\pi$. Welche besondere Situation wird hierdurch charakterisiert?

d) Welche weiteren Fälle sind zulässig? Geben Sie die Wellenfunktionen des Teilchens in diesen verbleibenden Fällen bis auf Normierung an.