Übungen zur Quantentheorie (Diplomstudiengang)

WS 97/98   Blatt 13

Aufgabe 13.1 (24 Punkte): Pauli-Gleichung (homogenes Magnetfeld)

Betrachten Sie die Pauli-Gleichung für den Fall eines räumlich homogenen Magnetfeldes der Stärke B in z-Richtung.

a) Das Magnetfeld sei zunächst zeitlich veränderlich ($B(t)$). Setzen Sie die Wellenfunktion in der Produktform $\langle\vec{x}|\psi(t)\rangle = \varphi(\vec{x},t)\chi(t)$ mit $\chi(t) = \binom{\chi_\downarrow(t)}{\chi_\uparrow(t)}$ an. Bilden Sie in der Pauli-Gleichung das Skalarprodukt im Spinraum mit χ^+ und benutzen Sie die Normiertheit von χ. Es entsteht eine effektive Schrödinger-Gleichung für φ allein, in die $|\chi_\downarrow|^2$ und $|\chi_\uparrow|^2$ eingehen.

b) Leiten Sie durch Einsetzen dieser Beziehung in die Pauli-Gleichung eine Differenzialgleichung für die Zeitveränderlichkeit von $\chi(t)$ her und zeigen Sie, dass der Erwartungswert von S_3 konstant ist.

c) Das Magnetfeld sei zeitlich konstant. Bestimmen Sie die Zeitentwicklung der Spinwellenfunktion.

d) Die Dgl. für χ aus b) kann in diesem Fall (Richtung des Magnetfeldes konstant und ohne Einschränkung in z-Richtung) auch für zeitabhängiges $B(t)$ integriert werden. Geben Sie die Lösung an.