Übungen zur Quantentheorie (Diplomstudiengang)

WS 97/98 Blatt 12

Aufgabe 12.1 (15 Punkte): Pauli-Spin-Matrizen

a) Für die Paulischen Spin-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\imath} \\ \hat{\imath} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

berechne man die Produkte $\sigma_k \sigma_l$ und stelle das Ergebnis allgemein als Linearkombination der Basismatrizen $\{\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ dar. *Hinweis:* Es genügt, einen Fall mit $k = l$ und einen mit $k \neq l$ zu berechnen. Die allgemeine Formel ergibt sich dann durch zyklisches Permutieren.

b) Verifizieren Sie anhand dieser Formel, dass die Matrizen $\frac{1}{2}\sigma_i$ die Drehimpuls-Vertauschungsrelationen erfüllen.

c) Beweisen Sie mit dem Resultat von a) die Formel

$$\exp\left(-\hat{\imath}\vec{\varphi} \cdot \tfrac{1}{2}\vec{\sigma}\right) = \left(\cos \tfrac{1}{2}\varphi\right) \mathbb{1} - \hat{\imath}\left(\sin \tfrac{1}{2}\varphi\right)\ \hat{\varphi} \cdot \vec{\sigma}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $(\vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma})^2 = \varphi^2 \mathbb{1}$ ist.

Aufgabe 12.2 (10 Punkte): Elektron mit polarisiertem Spin

Betrachten Sie ein Elektron, dessen Spin in Richtung $\hat{n}_1$ polarisiert ist. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten bei Messung des Spins in Richtung $\hat{n}_2$ jeweils die Eigenwerte $\pm\frac{\hbar}{2}$ auf ($\hat{n}_i$ = Einheitsvektor)? *Hinweis:* Legen Sie ohne Einschränkung $\hat{n}_1$ in z–Richtung und $\hat{n}_2$ in die x-z-Ebene.