Übungen zur Quantentheorie (Diplomstudiengang)

WS 97/98 Blatt 11

Aufgabe 11.1 (13 Punkte): Galilei-Transformation beim kräftefreien Teilchen

Ein kräftefreies Teilchen mit der allgemeinen Wellenfunktion

$$\psi(\vec{x},t) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3k\, g(\vec{k}) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x} - \frac{\hbar k^2}{2m} t\right)}$$

wird nach Übergang zu einem anderen Bezugssystem $(\vec{x}', t')$ mit

$$\begin{aligned} t' &= t \\ \vec{x}' &= \vec{x} - \vec{v}_0 t, \vec{v}_0 = \text{konstante Geschwindigkeit} \end{aligned}$$

durch eine neue Wellenfunktion $\psi'(\vec{x}', t')$ beschrieben.

a) Geben Sie das Transformationsgesetz an, das ψ' mit ψ verbindet. *Hinweis:* Betrachten Sie zunächst eine einzelne ebene Welle, für deren Impuls $\hbar\vec{k}$ das Transformationsgesetz offensichtlich ist und konstruieren Sie den allgemeinen Ausdruck durch Überlagerung.

b) Wie transformieren sich die Aufenthalts-Wahrscheinlichkeitsdichte $P(\vec{x},t)$ und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{j}(\vec{x},t)$? Zeigen Sie, dass man durch geeignete Wahl von $\vec{v}_0$ erreichen kann, dass im transformierten System gilt:$\langle \vec{x}\,' \rangle$ =const. und $\langle \vec{p}' \rangle = 0$.

Aufgabe 11.2 (20 Punkte): Eigenschaften des Bahndrehimpuls-Operators

Sei $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ der Bahndrehimpuls-Operator.

a) Wiederholen Sie die Eigenschaften der daraus gebildeten Stufenoperatoren $L_\pm := L_1 \pm \hat{\imath} L_2$. Berechnen Sie die Produkte L_+L_- und L_-L_+ und daraus den Kommutator $[L_+, L_-]$.

b) Berechnen Sie damit die Erwartungswerte und Schwankungsquadrate der Komponenten L_1 und L_2 des Drehimpulsoperators in den Eigenzuständen $|l,m\rangle$ von $\vec{L}^2$ und L_3.

c) Zeigen Sie, dass das Ergebnis in Einklang mit der Unschärferelation zwischen L_1 und L_2 steht.

d) Zeigen Sie, dass die Erwartungswerte eines beliebigen Operators A, der mit L_1 und L_2 vertauscht, in den Bahndrehimpuls-Eigenzuständen $|l,m\rangle$ nicht von m abhängen.

e) Zeigen Sie ferner, dass ein jeder solcher Operator A auch mit L_3 vertauscht. Was folgt daraus für die Matrixelemente von A zwischen Zuständen mit verschiedenem l bzw. m, $\langle l', m'|A|l,m\rangle$?