Übungen zur Quantentheorie (Diplomstudiengang)

WS 97/98 Blatt 10

Aufgabe 10.1 (10 Punkte): Reine und gemischte Zustände

Ein H-Atom mit den Bindungszuständen $|N, l, m\rangle$ werde

1. in dem reinen Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0,0\rangle + |2,0,0\rangle\right)$,

2. in einem gemischten Zustand präpariert, in dem es sich mit je 50% Wahrscheinlichkeit in den Unterräumen zu $|1,0,0\rangle$ und $|2,0,0\rangle$ befindet.

a) Geben Sie allgemein für das H-Atom die Projektoren in den Unterraum mit $N = 1$, den Unterraum mit $N = 2$ und den Unterraum gebundener Zustände mit $l = 0$ an und berechnen Sie die Projektionen des reinen Zustands $|\psi\rangle$ aus 1. in diese Unterräume.

b) Geben Sie für den Zustand aus 2. den statistischen Operator an und berechnen Sie für beide Zustände den Erwartungswert der Energie.

Aufgabe 10.2 (20 Punkte): Zeitunabhängige Störungstheorie

Sei $H(\lambda) = H_0 + \frac{\lambda}{n!}\hbar\omega\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}Q\right)^n$ eine Störung von $H_0 = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}Q^2$, dem Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators.

a) Berechnen Sie für $n = 0, 1$ und 2 die exakte Grundzustandsenergie $E_0(\lambda)$ zu $H(\lambda)$.

b) Die Störungsreihe für $E_0(\lambda)$ ist gegeben durch $E_0(\lambda) = E_0^{(0)} + \lambda E_0^{(1)} + \ldots$ Durch welche Formel wird die Korrektur erster Ordnung $E_0^{(1)}$ bestimmt? (Keine Herleitung erforderlich.)

c) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Formel $E_0^{(1)}$ für $n = 0, 1$ und 2. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem Ergebnis von a).

d) Die einfachste nichttriviale Störung ist diejenige mit $n = 3$. Berechnen Sie hierfür die Korrektur $E_0^{(1)}$. *Hinweis:* Stellen Sie Q als Linearkombination der Operatoren a und a^+ dar.
Zusatzfrage: Unter welchen Voraussetzungen ist eine Störungsrechnung bei diesem Potential sinnvoll? *Hinweis:* Zeichnen Sie die Potentialkurve.