Übungen zur Quantentheorie I (WS 2002/2003)

Blatt 8

Aufgabe 28: Zwei-Spin-System (3 Punkte)

Ein System zweier Elektronenspins sei durch den Hamiltonoperator $H = \gamma \vec{S}_a \cdot \vec{S}_b, \;\; \gamma \in \mathbb{R} > 0$, beschrieben. Bestimmen Sie die Dimension von γ. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenzustände von H. Gehen Sie dazu von einer Linearkombination der vier ungekoppelten Zustände aus und stellen Sie die zugehörige Eigenwertgleichung auf. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis für die so berechneten Eigenwerte mit Hilfe des Zusammenhangs zwischen dem gekoppelten Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ und den Spinoperatoren $\vec{S}_a$ und $\vec{S}_b$.

Aufgabe 29: N identische Fermionen (4 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N identischen Fermionen. Sei $|n_1, \ldots, n_N>_A = \sqrt{N!}A|n_1, \ldots, n_N>$ der durch $n_1 < \ldots < n_N$ numerierte N-Teilchenzustand in Form einer Slaterdeterminante. A ist hier der Antisymmetrisierungsoperator. (Es gilt $A^2 = A$ und $A^+ = A$.) Die Einteilchenzustände $|n>, n = 0, 1, 2, \ldots,$ seien orthonormiert. Betrachten Sie Observablen $B = \Sigma_{i=1}^N C^{(i)}$ mit $C^{(i)} = 1\!\!1 \otimes \cdots \otimes C \otimes \cdots \otimes 1\!\!1$, wobei der Operator C an i-ter Stelle steht.
Zeigen Sie, dass

- **a)** $[A, B] = 0$ ist,
- **b)** ${}_A< n_1, \ldots, n_N|B|n_1, \ldots, n_N>_A = \Sigma_{i=1}^N < n_i|C|n_i>$ gilt,
- **c)** ${}_A< n_1, \ldots, n_N|B|m_1, \ldots, m_N>_A = (-1)^{j-k} < n_j|C|m_k>$ gilt, falls $n_j \neq m_k$ ist, und die übrigen 1-Teilchenzustände übereinstimmen, und
- **d)** ${}_A< n_1, \ldots, n_N|B|m_1, \ldots, m_N>_A = 0$ gilt, wenn sich die Slaterdeterminanten in mehr als einem 1-Teilchenzustand unterscheiden.

Aufgabe 30: Theorem von Ehrenfest für ein N-Teilchen-System (4 Punkte)

Ein N-Teilche-System habe den Hamiltonoperator

$$H \;=\; \sum_i \Big(-\frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta_i + V_i(\vec{Q}_i)\Big) + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} V_{ji}(|\vec{Q}_j - \vec{Q}_i|).$$

Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehungen

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{X}\rangle \;=\; \frac{1}{M}\langle \vec{P}\rangle \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\langle \vec{P}\rangle \;=\; \Big\langle -\sum_i \frac{\partial}{\partial \vec{Q}_i} V_i(\vec{Q}_i)\Big\rangle,$$

wobei $\vec{X}$ der Schwerpunktsvektor, $\vec{P}$ der Gesamtimpuls und M die Gesamtmasse des Systems ist.

Aufgabe 31: Elektronen im Kastenpotenzial (4 Punkte)

Betrachten Sie drei nicht wechselwirkende Elektronen in dem eindimensionalen Kastenpotenzial mit der Länge L

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- **a)** Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie des Systems.
- **b)** Ermitteln Sie die Wellenfunktionen, die das Elektronensystem im Grundzustand beschreiben.