Übungen zur Quantentheorie I (WS 2002/2003)

Blatt 6

Aufgabe 20: Elektron mit polarisiertem Spin (3 Punkte)

Betrachten Sie ein Elektron, dessen Spin in Richtung $\vec{n}_1$ polarisiert ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten bei Messung des Spins in Richtung $\vec{n}_2$ jeweils die Eigenwerte $\pm\frac{\hbar}{2}$ auf? ($\vec{n}_1^2 = \vec{n}_2^2 = 1$). Drücken Sie die Ergebnisse durch $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$ aus.

Aufgabe 21: Drehung von Spinoren (3 Punkte)

Wie lautet die Transformations-Matrix $U_S(\vec{\alpha})$ für Spinoren bei einer Rotation um die y-Achse für die Winkel $\alpha = \pi$ und $\alpha = \pi/2$? In welche Spinoren werden die Zustände

$$|+\rangle \;=\; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |-\rangle \;=\; \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

jeweils transformiert?

Aufgabe 22: Messwahrscheinlichkeiten (2 Punkte)

Gegeben sei eine Spinorwellenfunktion $\binom{\psi_+(\vec{r})}{\psi_-(\vec{r})}$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung von S_3 in einem Volumen V den Wert $\frac{\hbar}{2}$ zu finden?

b) Wie groß ist der Erwartungswert von S_3 bei einer Messung im Volumen V?

c) Wie groß ist der Erwartungswert von S_1 bei einer Messung im Volumen V?

d) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\vec{Q}\rangle$ und $\langle\vec{P}\rangle$.

Aufgabe 23: Messung des Landé-Faktors (7 Punkte)

Ein Elektron der Masse m und der Ladung e befinde sich in einem homogenen, zeitunabhängigen und in z-Richtung orientierten magnetischen Feld. Der zugehörige Hamilton-Operator sei durch

$$H \;=\; \frac{1}{2m}(\vec{P} - e\vec{A})^2 - \vec{m}\cdot\vec{B} \quad \text{mit} \quad \vec{m} \;=\; g\frac{e}{2m}\vec{S} \quad \text{und} \quad g = 2(1+a)$$

gegeben, wobei für das Vektorpotenzial $\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{Q})$ gilt. g ist der sogenannte gyromagnetische- oder Landé-Faktor und a wird als Anomalie des magnetischen Moments bezeichnet. Der Operator der Geschwindigkeit sei durch $\vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{P} - e\vec{A})$ gegeben.

a) Rechnen Sie die Kommutatoren $[v_x, H] = i\hbar\omega\, v_y$, $[v_y, H] = -i\hbar\omega\, v_x$ und $[v_z, H] = 0$ mit $\omega = eB/m$ nach.

b) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung der durch $C_1(t) := \langle S_3 v_z\rangle$, $C_2(t) := \langle S_1 v_x + S_2 v_y\rangle$ und $C_3(t) := \langle S_1 v_y - S_2 v_x\rangle$ definierten Größen. *Hinweis:* Die Rechnungen liefern ein lineares System von Differenzial-Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Verwenden Sie die Abkürzung $\Omega = a\omega$.

c) Ermitteln Sie mit Hilfe von Aufgabenteil b) den Erwartungswert $\langle\vec{S}\cdot\vec{v}\rangle(t)$. Wie kann dies benutzt werden, um a zu messen?