Übungen zur Quantentheorie I (WS 2002/2003)

Blatt 12

Aufgabe 41: Zeitabhängige Störungtheorie für ein 2-Niveau-System (5 Punkte)

Gegeben sei ein quantenmechanisches System mit zwei stationären Energieeigenzuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$. Die Differenz der zugehörigen Energieeigenwerte betrage $E_2 - E_1 = \hbar\omega_{21}$. Zur Zeit $t = 0$, wo sich das System im Zustand $|1\rangle$ befinde, werde die zeitunabhängige kleine Störung H' mit den Matrixelementen

$$\langle 1|H'|1\rangle \;=\; 0, \qquad \langle 2|H'|1\rangle \;=\; \hbar\omega_0 \qquad \text{und} \qquad \langle 2|H'|2\rangle \;=\; -\hbar\omega_{21}$$

hinzugeschaltet.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie erster Ordnung die Wahrscheinlichkeit das System nach der Zeit t im Zustand $|1\rangle$ bzw. im Zustand $|2\rangle$ vorzufinden. Dabei soll $\omega_{21}t \ll 1$ und $\omega_0 t \ll 1$ gelten.

b) Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung exakt, indem Sie den Hamilton-Operator des obigen Problems diagonalisieren. Finden Sie $|\psi(t)\rangle$.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das System zu einer beliebigen Zeit t im Zustand $|2\rangle$ anzutreffen? Unter welcher Bedingung löst die in a) verwendete erste Ordnung der Störungsrechnung das Problem hinreichend gut? Zu welcher Zeit befindet sich das System mit Wahrscheinlichkeit 1 im Zustand $|2\rangle$?

Aufgabe 42: Thomas-Reiche-Kuhn-Summenregel (2 Punkte)

Berechnen Sie $[[x, H], x]$ für ein Teilchen in einem äußeren Potenzial. Zeigen Sie mit Hilfe dieses Doppelkommutators die Thomas-Reiche-Kuhn-Summenregel

$$\sum_f (E_f - E_i)|\langle f|x|i\rangle|^2 \;=\; \frac{\hbar^2}{2m}.$$

Aufgabe 43: Stoßexperiment in zeitabhängiger Störungstheorie (7 Punkte)

a) Ein Teilchen mit der Ladung Ze bewege sich auf der Bahn $\vec{R}(t) = (b, vt, 0)$ an einem Atom vorbei, das sich bei $\vec{r}_0 = (0,0,0)$ befindet. b ist der Stoßparameter. Betrachten Sie das Atom zusammengesetzt aus einem Rumpf mit Ladung $+e$ und einem Hüllenelektron. Zeigen Sie, dass die Coulomb-Energie des Teilchens im Feld des Rumpfes und des Hüllenelektrons bei $\vec{r}$ näherungsweise durch

$$V \;\approx\; -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0\, R^3}\,\vec{r}\cdot\vec{R} \qquad \text{für} \qquad |\,\vec{r}\,| \ll b$$

gegeben ist.

b) Das Hüllenelektron befinde sich anfangs im Zustand $|i\rangle$ mit der Energie E_i. Durch die Wechselwirkung mit dem vorbeifliegenden geladenen Teilchen ändert sich der Zustand. Die Amplitude für den Übergang in den Zustand $|f\rangle$ mit der Energie $E_f \neq E_i$ sei c_f. Der Vorbeiflug geschehe so rasch, dass

$$\omega \;=\; \frac{1}{\hbar}(E_f - E_i) \;\ll\; \frac{v}{b}$$

erfüllt ist.

Zeigen Sie, dass in diesem Falle approximativ

$$c_f \;\approx\; \frac{i}{\hbar}\,\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0\, vb}\,\langle f|x|i\rangle$$

in erster Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie gilt. *Hinweis:* Benutzen Sie für kleine γ

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha)\,d\alpha}{(\gamma^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \;\approx\; \frac{1}{\gamma^2} \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \frac{\alpha\sin(\alpha)\,d\alpha}{(\gamma^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \;\approx\; -\ln\gamma.$$

c) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Energieänderung

$$\delta E \;=\; \sum_f (E_f - E_i)|c_f|^2 \qquad \text{den Wert} \qquad \delta E \;=\; \frac{2Z^2e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, m\, b^2v^2}$$

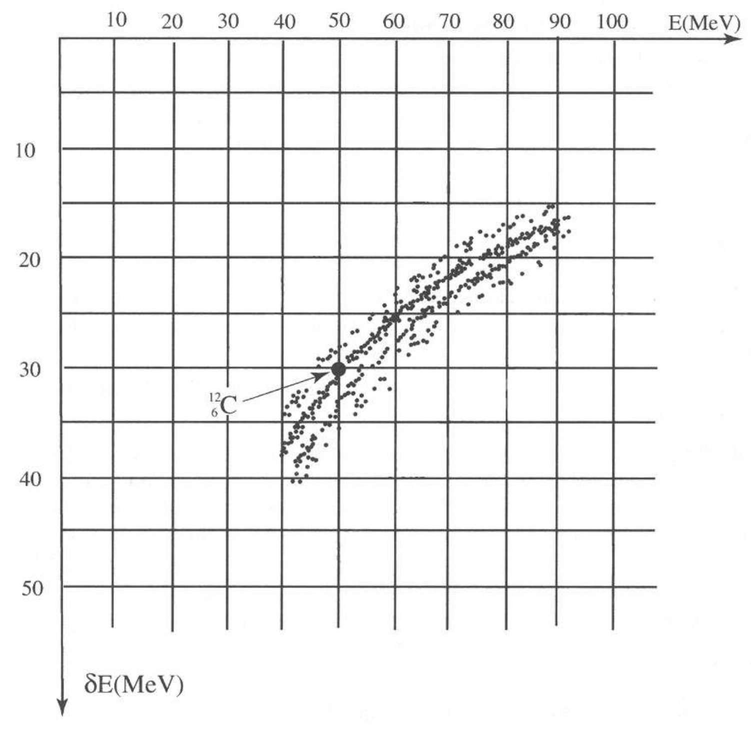
besitzt, wobei m die Elektronenmasse ist. Benutzen Sie die Thomas-Reiche-Kuhn-Summenregel aus Aufgabe 42.

d) Ein Atomkern mit Massenzahl A und Ladungszahl Z durchquert einen Festkörper. Durch die Wechselwirkung mit den Atomen verringert sich seine Energie E um den Betrag δE. Begründen Sie, dass

$$E\cdot\delta E \;\approx\; k\,Z^2 A$$

gilt. k ist eine vom Festkörper abhängige Materialkonstante.

e) In dem Diagramm unten sind die anfängliche Energie E und Energieverlust δE von Kohlenstoffkernen dargestellt, die einen Silizium-Detektor durchquert haben. Der Referenzpunkt bei $E = 50\text{MeV}$, $\delta E = 30\text{MeV}$ gehört zum Isotop $A = 12$. Bestimmen Sie die Materialkonstante k. Berechnen Sie δE für $E = 60\text{MeV}$ und 70MeV. Welche Kohlenstoff-Isotope kommen im Experiment noch vor?



Zur Erinnerung:
Die Klausur findet am Donnerstag, den 06. Februar 2003, 14.00 bis 17.00 Uhr im Hörsaal AP statt. Als Hilfsmittel sind 1 Blatt DINA4 (Notizen) und ein Taschenrechner (ohne Textspeicher) erlaubt.