Übungen zur Quantentheorie für Lehramtsstudierende und Informatiker/innen (WS 2006/2007)

Blatt 8

Aufgabe 27: Zwei-Niveau-System (5 Punkte)

Der Grundzustand und ein angeregter Zustand eines Atoms haben die Energien E_0 und E_1. Die zugehörigen Eigenfunktionen ψ_0 und ψ_1 bilden eine Basis eines Teilraums des physikalischen Zustandsraumes.

a) Wie sieht der Hamilton-Operator H_0 in dieser Basis aus? (1 Punkt)

b) Nun wird eine Wechselwirkung eingeschaltet, für deren Beitrag H_1 zum Hamilton-Operator gilt

$$H_1\psi_0 = \varepsilon\psi_1, \quad (\psi_1, H_1\psi_1) = 0, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}.$$

Wie lautet der komplette Hamilton-Operator $H = H_0 + H_1$ in obiger Basis? (1 Punkt)

c) Welche Eigenwerte und Eigenfunktionen besitzt H? Entwickeln Sie die Energien zusätzlich in eine Taylorreihe nach $|\varepsilon|$. (3 Punkte)

Aufgabe 28: Operatoridentitäten (3 Punkte)

a) Beweisen Sie die Operatoridentitäten

$$[B, A] = -[A, B], \qquad [A + B, C] = [A, C] + [B, C], \qquad [AB, C] = [A, C]B + A[B, C].$$

(1 Punkt)

b) Berechnen Sie ausgehend von der Born-Jordan'schen Vertauschungsrelation $[P_j, Q_k] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\delta_{jk}\mathbb{1}$ mit Hilfe von Aufgabenteil a) die Kommutatoren

$$[\vec{P}^2, Q_k] \qquad \text{und} \qquad [L_k, Q_l],$$

wobei $L_k = \varepsilon_{ijk}Q_iP_j$ (Summenkonvention!) der Operator einer Drehimpulskomponente ist. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass für Operatoren A, B und C die Jacobi-Identität

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

erfüllt ist. (1 Punkt)

Aufgabe 29: Operatorfunktionen (6 Punkte)

a) $f(Q)$ sei eine analytische Funktion des Ortsoperators Q in einer Dimension. Berechnen Sie die Kommutatoren $[Q, f(Q)]$ und $[P, f(Q)]$, indem Sie

- die Definitionen der Operatoren im Ortsraum verwenden, (1 Punkt)
- $f(Q)$ in eine Potenzreihe entwickeln und den Kommutator $[P, Q^n]$ algebraisch bestimmen. (2 Punkte)

b) Reproduzieren Sie, dass der Kommutator $[P, f(Q)]$ für $f(Q) = Q$ die Born-Jordan'sche Vertauschungsrelation liefert. (1 Punkt)

c) Sei $H = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$. Zeigen Sie

$$[H, Q] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{P}{m}.$$

(1 Punkt)

d) Benutzen Sie das Ergebnis aus c) um $\langle p \rangle$ in einem stationären Zustand zu berechnen. (1 Punkt)