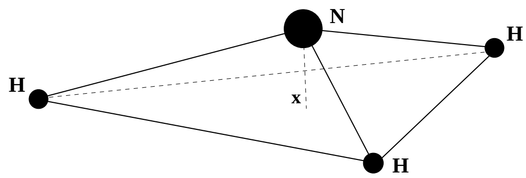
Übungen zur Quantentheorie für Lehramtsstudierende und Informatiker/innen (WS 2006/2007)

Blatt 7

Aufgabe 23: Ammoniak-Molekül (5 Punkte)

Das Ammoniak-Molekül NH_3 hat die Form einer Pyramide, wobei die H-Atome an den Ecken der Basis sitzen. Der Abstand des N-Atoms von der Mitte der Basis beträgt $a = 3,8 \cdot 10^{-11}$m.



Betrachtet man die H-Atome als starres Dreieck, und das N-Atom in einem variablen Abstand x von der Mitte des Dreiecks, so kann die potentielle Energie approximativ durch

$$V(x) = \lambda(x^2 - a^2)^2$$

beschrieben werden.

a) Experimentell ist $V(0) = 4,12 \cdot 10^{-20}$ J bekannt. Bestimmen Sie den Parameter λ und die Frequenz ν für kleine Schwingungen um die Ruhelage und vergleichen Sie sie mit dem experimentellen Wert $\nu = 2,85 \cdot 10^{13}\mathrm{s}^{-1}$. Für die Masse ist die reduzierte Masse

$$m = \frac{3m_\mathrm{H} m_\mathrm{N}}{3m_\mathrm{H} + m_\mathrm{N}}$$

zu verwenden. (2 Punkte)

b) Das N-Atom kann durch die Basis-Ebene hindurch tunneln. Berechnen Sie den Exponenten B im Gamow-Faktor $T(0) = \exp(-2B)$ für $E = 0$. Wiederum ist die reduzierte Masse zu verwenden. (2 Punkte)

c) Die beiden niedrigsten Energie-Eigenwerte liegen nahe beieinander und sind durch eine Lücke ΔE getrennt. Ein quantenmechanisches Näherungsverfahren liefert

$$\Delta E \approx 8\hbar a \sqrt{\frac{3B\lambda}{m\pi}}\, \mathrm{e}^{-B}.$$

Berechnen Sie hiermit ΔE. Die Energie-Lücke findet Anwendung im Ammoniak-Maser, wo die zugehörige „Inversionsfrequenz“ $\nu_I = \Delta E/h$ angeregt wird. Vergleichen Sie ihren theoretischen Wert mit dem experimentellen $\nu_I = 2,38 \cdot 10^{10}\mathrm{s}^{-1}$. (1 Punkt)

Aufgabe 24: Teilchen auf dem Intervall (4 Punkte)

Der Differenzialoperator H_0 ist durch die Gleichung $H_0\varphi(x) = -(\hbar^2/2m)\varphi''(x)$ definiert. Untersuchen Sie seine Eigenschaften auf dem Raum der zweimal differenzierbaren Funktionen φ mit Träger im Intervall $[-a, a]$, die den Randbedingungen $\varphi(-a) = \varphi(a)$ und $\varphi'(-a) = \varphi'(a)$ genügen.

a) Zeigen Sie, dass H_0 hermitesch bezüglich des Skalarprodukts $(\varphi, \psi) = \int\limits_{-a}^{a} dx\, \varphi(x)^* \psi(x)$ ist. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von H_0. Zeigen Sie die Orthonormalität der Eigenfunktionen. (2 Punkte)

c) Warum kann man H_0 nicht als den Hamiltonoperator eines Teilchens interpretieren, das im Kasten $-a \leq x \leq a$ eingesperrt ist? Für welchen anderen Behälter wäre H_0 ein akzeptabler Hamiltonoperator? (1 Punkt)

Aufgabe 25: Operator-Adjungierte (4 Punkte)

Finden Sie die adjungierten Operatoren zu

a) $A_1 = x + \frac{d}{dx}$, (1 Punkt)

b) $A_2\psi(x) = \alpha\psi(x), \quad \alpha \in \mathbb{C}$, (1 Punkt)

c) $A_3\psi(x) = \psi(x + a), \quad a \in \mathbb{R}$, (1 Punkt)

d) $A_4\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x - y)\psi(y)dy$. (1 Punkt)

Aufgabe 26: Parität (3 Punkte)

Ein Teilchen in einer Dimension bewege sich im geraden Potenzial

$$V(x) = V(-x).$$

Der Paritäts-Operator Π ist definiert durch

$$\Pi\psi(x) = \psi(-x).$$

a) Zeigen Sie:

i) $\Pi^\dagger = \Pi$,

ii) $\Pi^2 = \mathbb{1}$,

iii) $H\Pi = \Pi H$. (2 Punkte)

b) Welche Eigenwerte besitzt Π? Welche Eigenschaften haben die zugehörigen Eigenfunktionen? (1 Punkt)