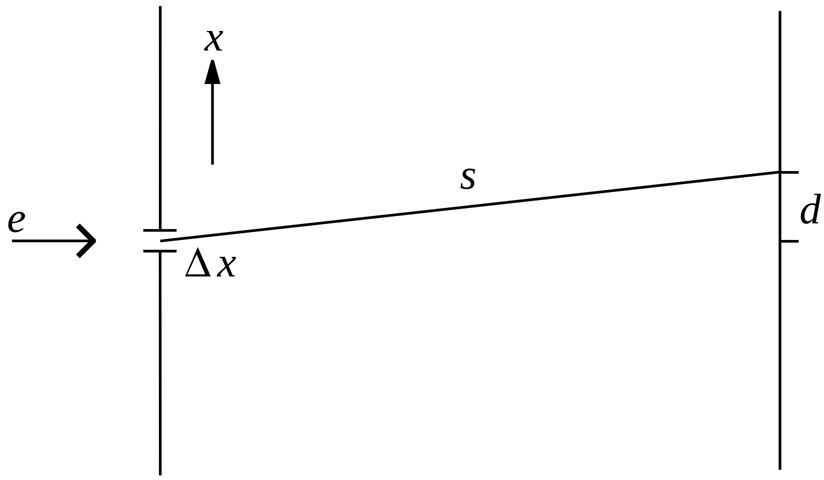
Übungen zur
Quantentheorie für Lehramtsstudierende und Informatiker/innen
(WS 2006/2007)

Blatt 4

Aufgabe 12: Das Heisental'sche Schärfe-Experiment (3 Punkte)

Prof. Heisental hat einen Weg gefunden, die Unschärferelation zu umgehen. Sein Experiment sieht folgendermaßen aus:



Ein Elektron wird mit der Geschwindigkeit v duch einen Spalt der Breite Δx geschickt. Die Ortsunschärfe in der x-Koordinate ist dort also Δx. Etwas später, nachdem es die Strecke s zurückgelegt hat, erzeugt das Elektron einen Punkt auf dem Schirm. Dabei hat es sich in x-Richtung um die Strecke d bewegt, die mit der Genauigkeit Δx bestimmt werden kann. Hieraus schließt Prof. Heisental zurück auf die Impulskomponente p_x, die den Wert $p_x = mv_x = mv\frac{d}{s}$ besitzt, mit einer Genauigkeit $\Delta p_x = mv\frac{\Delta x}{s}$. Das Produkt $\Delta x \cdot \Delta p_x$ kann durch geeignete Wahl von s beliebig klein gemacht werden.

Hat Prof. Heisental die Unschärferelation widerlegt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 13: Teilchen in einem Kasten (2 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem würfelförmigen Kasten mit Volumen L^3. Finden Sie mit Hilfe der Heisenberg'schen Unschärferelation eine untere Schranke für den Erwartungswert der Energie.

Aufgabe 14: Imaginäre Energie? (2 Punkte)

Die Energie eines stationären, normierbaren Zustandes sei komplex:

$$E = E_\mathrm{R} + \mathrm{i}E_\mathrm{I}.$$

Zeigen Sie durch Betrachtung der Normierung der Wellenfunktion, dass $E_\mathrm{I} = 0$ sein muss.

Aufgabe 15: Schrödinger-Gleichung im Impulsraum (3 Punkte)

Ein Teilchen bewege sich im Potenzial $V(x)$. Das Potenzial besitze die Fouriertransformierte

$$\tilde{V}(k) = \int dx\, V(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}.$$

Wie lautet die Schrödinger-Gleichung für $\tilde{\psi}(k,t)$ im Impulsraum?

Aufgabe 16: Relativistische Wellengleichungen (6 Punkte)

a) Wie lautet die Wellengleichung für ein freies relativistisches Teilchen

i) von zweiter Ordnung in der Zeit: $-\hbar^2 \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \ldots$ (1 Punkt),

ii) von erster Ordnung in der Zeit: $\mathrm{i}\hbar \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = \ldots$ (1 Punkt)?

b) Wie lässt sich der in (ii) auftauchende, ungewohnte Differenzialoperator mit Hilfe der Fouriertransformation definieren? (2 Punkte)

c) Wie lautet die allgemeine Lösung der Wellengleichung für gegebenen Wellenvektor $\vec{k}$ für die Fälle (i) und (ii)? (2 Punkte)