

Übungen zur  
Quantentheorie für Lehramtsstudierende und Informatiker/innen  
(WS 2006/2007)

Blatt 12

Übungsklausur (ohne Wertung)

**Aufgabe 1: Grundlagen**

- a) Formulieren Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung.
- b) Was sagt das Superpositionsprinzip aus?
- c) Geben Sie die Kontinuitätsgleichung an. Wie sind Wahrscheinlichkeitsdichte und Wahrscheinlichkeitsstrom definiert?
- d) Was sind stationäre Zustände und wie lautet ihre Zeitabhängigkeit?
- e) Die stationäre Schrödingergleichung besitzt als Differentialgleichung im Allgemeinen Lösungen zu beliebiger Energie  $E$ . Warum kann es sein, dass für einige Potenziale nur gewisse diskrete Werte  $E$  physikalisch zulässig sind?
- f) Sei  $\psi$  ein normierter stationärer Zustand im physikalischen Hilbertraum und sei  $\{\varphi_n\}$  ein diskretes vollständiges Orthonormalsystem.
  - i) Wie lautet die Entwicklung von  $\psi$  nach den Zuständen  $\{\varphi_n\}$ ?
  - ii) Welche physikalische Bedeutung haben die Entwicklungskoeffizienten?
  - iii) Wie lässt sich die Normierung von  $\psi$  durch die Entwicklungskoeffizienten ausdrücken?
- g) Wie lautet das Matrixelement  $(\psi, A\psi)$  mit Wellenfunktionen geschrieben?
- h)  $A$  und  $B$  seien hermitesche Operatoren. Begründen Sie, welche der nachfolgenden Operatoren hermitesch sind:
  - i)  $AB + BA$
  - ii)  $AB - BA$
  - iii)  $\exp(A)$
  - iv)  $\exp(iA)$
- j) Wie sind die Unschärfen  $\Delta x$  und  $\Delta p$  für ein quantenmechanisches Teilchen definiert?
- k) Geben Sie das Energiespektrum für ein Teilchen im unendlich hohen eindimensionalen Potenzialtopf der Breite  $L$  an.
- l) Was bedeutet Entartung? Welchen Entartungsgrad haben die Energiewerte des Wasserstoffatoms (in der nichtrelativistischen Quantenmechanik ohne Spin)?

## Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator

- Formulieren Sie den Hamiltonoperator für den eindimensionalen harmonischen Oszillator. Skizzieren Sie den Verlauf des Potentials.
- Der Absteigeoperator ist  $a = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}(\omega Q + \frac{i}{m}P)$ . Wie lautet der Aufsteigeoperator?
- Geben Sie die Kommutatoren  $[Q, P]$ ,  $[a, a^\dagger]$ ,  $[Q, a + a^\dagger]$ ,  $[H, a^\dagger a]$  ohne lange Rechnung an.
- Berechnen Sie die Matrixelemente  $(\varphi_2, Q\varphi_0)$ ,  $(\varphi_2, P\varphi_0)$ ,  $(\varphi_2, Q^2\varphi_0)$ ,  $(\varphi_2, P^2\varphi_0)$ , wobei  $\{\varphi_n\}$  die Eigenfunktionen zum Hamiltonoperator sind.
- Wie lautet die Wellenfunktion des Grundzustandes?

## Aufgabe 3: Quantenmechanischer Kasten

Ein Teilchen der Masse  $m$  befindet sich im eindimensionalen unendlich hohen Kasten der Breite  $L$  zwischen  $x = -\frac{L}{2}$  und  $x = \frac{L}{2}$ . Die Wellenfunktion sei gegeben durch

$$\psi(x) = N \left( e^{-a|x|} - e^{-a\frac{L}{2}} \right).$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Energiemessung die Energie des Grundzustandes zu finden?

## Aufgabe 4: Zweidimensionaler Oszillator

Das Potenzial des zweidimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$V(x_1, x_2) = \frac{m}{2}(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2).$$

Welche Eigenwerte besitzt der Hamiltonoperator? Wie groß ist ihre Entartung für den Fall  $\omega_2 = 2\omega_1$ ?

## Aufgabe 5: Drehimpuls

Gegeben sei ein Eigenzustand zu  $\vec{L}^2$  mit  $l = 1$ . Er sei außerdem Eigenzustand zu  $L_1$  mit Eigenwert  $\hbar$ . Stellen Sie den Zustand durch die Kugelflächenfunktionen  $Y_{l,m}$  dar.