

Übungen zur Quantentheorie für Lehramtsstudierende und Informatiker/innen (WS 2006/2007)

Blatt 12

Übungsklausur (ohne Wertung)

Aufgabe 1: Grundlagen

- a) Formulieren Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung.
- b) Was sagt das Superpositionsprinzip aus?
- c) Geben Sie die Kontinuitätsgleichung an. Wie sind Wahrscheinlichkeitsdichte und Wahrscheinlichkeitsstrom definiert?
- d) Was sind stationäre Zustände und wie lautet ihre Zeitabhängigkeit?
- e) Die stationäre Schrödingergleichung besitzt als Differenzialgleichung im Allgemeinen Lösungen zu beliebiger Energie E . Warum kann es sein, dass für einige Potenziale nur gewisse diskrete Werte E physikalisch zulässig sind?
- f) Sei ψ ein normierter stationärer Zustand im physikalischen Hilbertraum und sei $\{\varphi_n\}$ ein diskretes vollständiges Orthonormalsystem.
 - i) Wie lautet die Entwicklung von ψ nach den Zuständen $\{\varphi_n\}$?
 - ii) Welche physikalische Bedeutung haben die Entwicklungskoeffizienten?
 - iii) Wie lässt sich die Normierung von ψ durch die Entwicklungskoeffizienten ausdrücken?
- g) Wie lautet das Matrixelement $(\psi, A\psi)$ mit Wellenfunktionen geschrieben?
- h) A und B seien hermitesche Operatoren. Begründen Sie, welche der nachfolgenden Operatoren hermitesch sind:
 - i) $AB + BA$
 - ii) $AB - BA$
 - iii) $\exp(A)$
 - iv) $\exp(iA)$
- j) Wie sind die Unschärfen Δx und Δp für ein quantenmechanisches Teilchen definiert?
- k) Geben Sie das Energiespektrum für ein Teilchen im unendlich hohen eindimensionalen Potenzialtopf der Breite L an.
- l) Was bedeutet Entartung? Welchen Entartungsgrad haben die Energiewerte des Wasserstoffatoms (in der nichtrelativistischen Quantenmechanik ohne Spin)?

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator

- a) Formulieren Sie den Hamiltonoperator für den eindimensionalen harmonischen Oszillator. Skizzieren Sie den Verlauf des Potentials.
- b) Der Absteigeoperator ist $a = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}(\omega Q + \frac{i}{m}P)$. Wie lautet der Aufsteigeoperator?
- c) Geben Sie die Kommutatoren $[Q, P]$, $[a, a^\dagger]$, $[Q, a + a^\dagger]$, $[H, a^\dagger a]$ ohne lange Rechnung an.
- d) Berechnen Sie die Matrixelemente $(\varphi_2, Q\varphi_0)$, $(\varphi_2, P\varphi_0)$, $(\varphi_2, Q^2\varphi_0)$, $(\varphi_2, P^2\varphi_0)$, wobei $\{\varphi_n\}$ die Eigenfunktionen zum Hamiltonoperator sind.
- e) Wie lautet die Wellenfunktion des Grundzustandes?

Aufgabe 3: Quantenmechanischer Kasten

Ein Teilchen der Masse m befindet sich im eindimensionalen unendlich hohen Kasten der Breite L zwischen $x = -\frac{L}{2}$ und $x = \frac{L}{2}$. Die Wellenfunktion sei gegeben durch

$$\psi(x) = N \left(e^{-a|x|} - e^{-a\frac{L}{2}} \right).$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Energiemessung die Energie des Grundzustandes zu finden?

Aufgabe 4: Zweidimensionaler Oszillator

Das Potenzial des zweidimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$V(x_1, x_2) = \frac{m}{2}(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2).$$

Welche Eigenwerte besitzt der Hamiltonoperator? Wie groß ist ihre Entartung für den Fall $\omega_2 = 2\omega_1$?

Aufgabe 5: Drehimpuls

Gegeben sei ein Eigenzustand zu \vec{L}^2 mit $l = 1$. Er sei außerdem Eigenzustand zu L_1 mit Eigenwert \hbar . Stellen Sie den Zustand durch die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}$ dar.