Seminar EconoPhysics SoSe 99
WWU Münster

Das Gefangenendilemma als evolutionäres Spiel

Jens Fischer

29.06.1999

Das Gefangenendilemma als evolutionäres Spiel

---

1. das klassische Gefangenendilemma
2. Spieltheorie - kurze Einführung
3. Evolutionäre Spieltheorie
4. Gefangenendilemma auf dem Gitter
5. Ergebnisse

das klassische Gefangenendilemma

- zwei Verdächtige in Einzelhaft
- Anklage wegen Kapitalverbrechens
- Kooperieren s_{i1} oder Defektieren s_{i2} ?
- Ereignismatrix

	Spieler 2	
Spieler 1	Nicht Gestehen s_{21}	Gestehen s_{22}
Nicht Gestehen s_{11}	1 Jahr für 1 1 Jahr für 2	10 Jahre für 1 3 Monate für 2
Gestehen s_{12}	3 Monate für 1 10 Jahre für 2	8 Jahre für 1 8 Jahre für 2

- strategisches Entscheidungsproblem für die Gefangenen
- Lage läßt sich formal als Spielsituation auffassen

Spieltheorie - kurze Einführung
das Spiel

- Spiel Γ=(N,S,u) ist beschrieben durch

1. die **Menge der Spieler** N={1,...,n}

2. den **Strategieraum** S, mit der Menge aller Strategiekombinationen s=(s_1,...,s_n) aus den Strategien $s_i \in S_i$ aller Spieler

3. die **Nutzenfunktion** u=(u_1,...,u_n). $u_i(s)$ gibt den Nutzen für Spieler i an, wenn die Strategiekombination s gespielt wird.

4. die **Spielregeln** (soweit sie durch die **Strategiemengen** S_i festgelegt sind).

5. den **Auszahlungsraum**, als die Menge aller zulässigen Nutzenkombinationen, bezeichnet man mit:

$$P = \{u(s)|s \in S\} = \{(u_1(s), .., u_n(s))\forall s \in S\} \tag{1}$$

Spieltheorie - kurze Einführung
weitere Begriffe

- Nullsummenspiele
  die Summe aller Auszahlungen ist null
  $$\sum_{i=1}^{n} u_i = 0 \tag{2}$$
  Beispiele: Skat, Schach

- Nichtnullsummenspiele
  die Summe aller Auszahlungen ist nicht null
  Beispiele: Gefangenendilemma

- Spiele mit perfekter Information
  Spiel, bei dem die Spieler zu jedem Zeitpunkt vollständig über den bisherigen Spielverlauf informiert sind
  Beispiel: Schach (Spielbaum)

- Spiele mit imperfekter Information
  Beispiele: Gefangenendilemma, Poker

Spieltheorie - kurze Einführung
weitere Begriffe

- reine Strategie
  Strategiewahl des Spieler ist eindeutig determiniert

- gemischte Strategie
  Strategie wird durch einen Zufallsmechanismus gewählt

- kooperative Spiele
  Spiele, bei denen die Mitspieler bindende Abmachungen treffen können (Kommunikation möglich, Abmachung wird z.B. durch dritte Partei durchgesetzt)

- nicht-kooperative Spiele
  Beispiel: Gefangenendilemma

Spieltheorie - kurze Einführung
weitere Begriffe

- dominante Strategie
  Strategie eines Spielers, die unabhängig von den Strategien der Mitspieler besser als alle anderen eigenen Strategien ist.
  Strategie s_1 dominiert Strategie s_2
  $$\Leftrightarrow \forall t \in T : u(s_1, t) > u(s_2, t) \qquad (3)$$
  mit T Menge der Strategien der Mitspieler

- dominierte Strategie
  Strategie eines Spielers, die unabhängig von der Strategiewahl der Mitspieler, für den betrachteten Spieler ungünstig ist.

Spieltheorie - kurze Einführung

- dominante Strategien Gleichgewicht

  Situation, bei der für jeden Spieler eine dominante Strategie existiert und jeder der Spieler diese benutzt

  $\Rightarrow$ diese Kombination dominanter Strategien und ihrer Punktzahlen führt zum Gleichgewicht

  Beispiel: Gefangenendilemma

- Nash-Gleichgewicht

  Situation, bei der es sich für die Spieler nicht lohnt von ihrer Gleichgewichtsstrategie abzuweichen.

  Ein Strategiepaar σ, τ ist ein Nash-Gleichgewicht, wenn für alle reinen Strategien s,t gilt:

$$u_1(\sigma,\tau) \geq u_1(\sigma,t) \tag{4}$$
$$u_2(\sigma,\tau) \geq u_2(s,\tau) \tag{5}$$

Spieltheorie - kurze Einführung

Nash-Gleichgewicht

Spiel ohne dominante Strategien

	Spieler 2		
	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Spieler 2 Strategie 1	(3,-3)	(1,1)	(-3,3)
Spieler 2 Strategie 2	(1,1)	**(2,2)**	(1,1)
Spieler 1 Strategie 3	(-3,3)	(1,1)	(3,-3)

$\Rightarrow$ Nash-Gleichgewicht: beide Spieler wählen Strategie 2

Spieltheorie - kurze Einführung

Gefangenendilemma als Spiel

- Auszahlungsmatrix für das Gefangenen-dilemma

	Spieler 2	
Spieler 1	Nicht Gestehen s_{21}	Gestehen s_{22}
Nicht Gestehen s_{11}	(3,3)	(1,4)
Gestehen s_{12}	(4,1)	(2,2)

- dominante Strategien: s_{i2} (Defektieren)

- dominante Strategien Gleichgewicht: (s_{12}, s_{22})

- Definition des Gefangenendilemmas

$$u_1(s_{12}, s_{21}) > u_1(s_{11}, s_{21}) > u_1(s_{12}, s_{22}) > u_1(s_{11}, s_{22})$$
$$\text{und } 2u_1(s_{11}, s_{21}) > u_1(s_{12}, s_{21}) + u_1(s_{11}, s_{22})$$

evolutorische Spieltheorie - Einführung

Unterschiede zur klassischen Spieltheorie

- keine rationale, bewußte Strategiewahl

  Für die Spieler liegt keine bewußte strategische Entscheidungssituation vor.

- keine Unterscheidung zwischen Spieler und Strategie

  Strategien und Spieler werden in der evolutorischen Spieltheorie gleichgesetzt.

- kein Spiel?

  - Zweig hat sich aus der herkömmlichen Spieltheorie entwickelt

  - Antworten auf Fragen, die die Spieltheorie nicht beantworten kann (z.B. wenn mehrere Gleichgewichte vorliegen)

evolutorische Spieltheorie - Einführung
Das Modell

---

1. Spieler ist Mitglied einer großen Gesamtheit (Population)
   (für jeden Spieler sind entscheidungsrelevante Merkmale der Gesamtheit zufallsverteilt)

2. Spieler entscheiden nicht strategisch
   (kein optimierendes Verhalten)

3. Spieler lernen aus dem Spielverlauf
   Nur in dem Sinne, daß die Strategie zum Zeitpunkt t, eine Folge der Vergangenheit ist.
   $\Rightarrow$ evolutionärer Prozeß

4. Spieler handelt nicht zukunftsorientiert
   (in Bezug auf die eigene Auszahlung)

5. Spieler treffen paarweise aufeinander

evolutorische Spieltheorie - Einführung

Das Modell und weitere Definitionen

- vollständige Beschreibung eines evolutorischen Spiels

  Spieler, Strategiemengen und die Auszahlungen müssen spezifiziert werden

- Mutant

  Spieler, der andere Strategie wählt als die etablierten Spieler (kommt von außen oder aus Änderung der Strategiewahl eines etablierten Spielers)

- Fitness

  Die Auszahlungen eines Spielers wird mit seinem Durchsetzungsvermögen, seiner Fitness, gleichgesetzt.

evolutorische Spieltheorie - Einführung

Das Modell und weitere Definitionen

- Population

  Strategieraum des evolutorischen Spiels zu einem bestimmten Zeitpunkt- dieser Raum ist nicht abgeschlossen, neue Strategien können hinzukommen (Mutation, Invention oder Innovation)

- monomorphe Population

  Population, deren Mitglieder identisch sind

- polymorphe Population

  Population, deren Mitglieder nicht identisch sind

evolutorische Spieltheorie - Einführung
Das Modell und weitere Definitionen

- evolutorische Stabilität

  Population, Strategievektor s=($s_1, ..., s_n$), ist in einer Art Gleichgewicht, wenn s eine evolutorisch stabile Strategie ist.

- s^* evolutorisch stabil in monomorpher Population $\Leftrightarrow$

  $(1-\epsilon)u(s^*, s^*) + \epsilon u(s^*, s) > (1-\epsilon)u(s, s^*) + \epsilon u(s, s)$,
  für alle reinen oder gemischten Strategien s

  (Ungleichung besagt, daß beim Zutritt eines beliebig kleinen Anteil ϵ von Spielern, die statt s^* die Strategie s spielen, die Strategie s^* erfolgreicher ist als s.)

- Fitnessfunktion $u(s_i, s_j)$

  Diese Funktion gibt an, mit welcher Stärke sich Spieler i gegen j durchsetzt, wenn i auf j trifft.

evolutorische Spieltheorie - Einführung
Das Modell und weitere Definitionen

Standardannahme der Theorie der evolutorischen Spiele:

- Replikatorengleichung
  Der Anteil x_i der Spieler, die die Strategie i spielen, entwickelt sich entsprechend der Replikatorengleichung, wobei $u_i(x(t))$ die Fitness dieser Strategie und $\bar{u}(x(t))$ die durchschnittliche Fitness aller Strategien ist :

$$\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = u_i(x(t)) - \bar{u}(x(t)) \text{ für } t \geq 0. \qquad (6)$$

  (polymorphe Population mit $\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1$)

spatial evolutionary PD game
Nowak und May - 1993

- feste Position der Individuen
  Spieler sind auf einem Gitter angeordnet und Spielen mit sich und ihren Nachbarn.

- einfache Strategien - nur 2 Arten
  Spieler kooperieren oder defektieren.

- Evolutionsregel und diskrete Zeit
  - Strategieänderung zwischen zwei Zeitschritten gemäß der Strategie des Spielers mit der höchsten Auszahlung
  - feste Auszahlungsmatrix mit Parameter

- Untersuchungen
  Entwicklung des Systems bei verschiedenen Anfangsverteilungen und Parametern der Auszahlungsmatrix beobachtet.(z.B. Koexistenz von Kooperation und Defektion, Eindringen von Kooperation in Defektionsdomänen etc.)

spatial evolutionary PD game

Szabo und Töke - 1997

Modell

- Spielfeld

  quadratisches Gitter

- Strategien

  Kooperation (C) oder Defektion (D)

- Spiel

  - Jeder spielt mit seinen Nachbarn und sich ein PD-Spiel.
  - Totale Fitness jedes Spielers ist Summe über alle Auszahlungen in einer Spielrunde.

- Auszahlungsmatrix

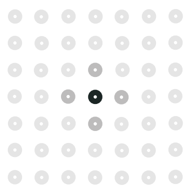
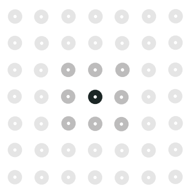
A \ B	C	D
C	1	0
D	$b_{>1}$	0

spatial evolutionary PD game

Szabo und Töke - 1997

Modell

- 2 Spielsysteme - Nachbarschaft

4 Gegenspieler	8 Gegenspieler
	

- Evolutionsregel
  Der zufällig ausgewählte Spieler X ändert seine Strategie nach folgender Regel:
  - Spieler Y wird zufällig aus der Nachbarschaft ausgewählt
  - Spieler X ändert Strategie nach folgender Wahrscheinlichkeit

    $$W = \frac{1}{1 + exp[-(E_Y - E_X)/K]} \qquad (7)$$

    Hierbei sind E_X und E_Y die Gesamtauszahlung (Fitness) der Vorgängerrunde. K ist ein Rauschparameter.

spatial evolutionary PD game
Szabo und Töke - 1997
Untersuchungen

- Systemgrößen
  - 200 * 200 bis 1000 * 1000
  - c ist das Verhältnis der Kooperateure an der Gesamtzahl (Dichte)
  - Werte für b bei festem K variiert
- Methoden
  - Spiel häufig spielen $\Leftrightarrow$ Monte Carlo Simulation
  - analytischer Ansatz $\Leftrightarrow$ Mean-Field-Techniken

spatial evolutionary PD game

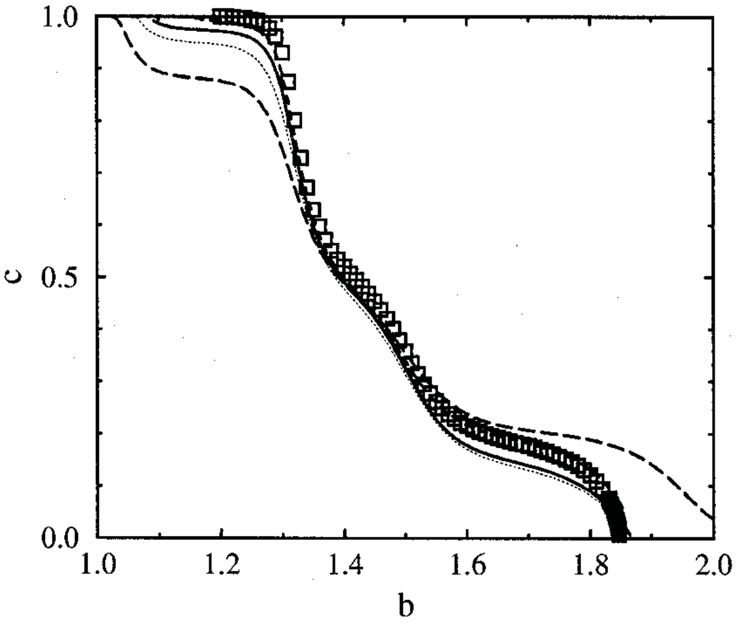
Szabo und Töke - 1997

Ergebnisse

- Beide Modelle:
  c=0 (alle D) und c=1 (alle C)
  Zustand ist Zeitunabhängig (s. Evolutionsregel).

- Beide Modelle:
  Auftreten von zwei Schwellwerten b_{c1}(>1), b_{c2}
  Jede Konstellation von Defektoren wird zerstört, wenn b<b_{c1}.$\hookrightarrow$ c=1
  Jede Konstellation von Kooperateuren wird zerstört, wenn b>b_{c2}.$\hookrightarrow$ c=0
  $\Rightarrow$ Koexistenzbereich: $b_{c1} < b < b_{c2}$

spatial evolutionary PD game
Szabo und Töke - 1997
Ergebnisse - 4 Nachbarn



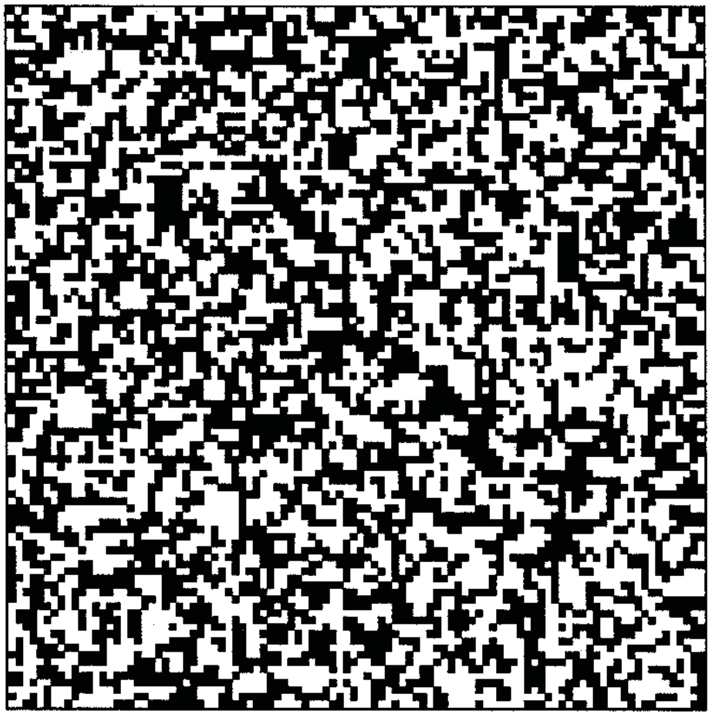
Dichte der Kooperateure als Funktion von b für K=0.1. MC: Boxes, MFT: long-dashed (Clustergröße 2), dotted (4), dashed (5), solid line (6)

- Treppenartige Funktion
  Je deutlicher, je kleiner der Rauschfaktor K.
  MFT sehr ungünstig für c nahe 1 oder 0, durch Mittelung gehen Informationen über langreichweitige Korrelationen und Fluktuationen bei kritischen Übergängen verloren.

spatial evolutionary PD game

Szabo und Töke - 1997

Ergebnisse - 4 Nachbarn



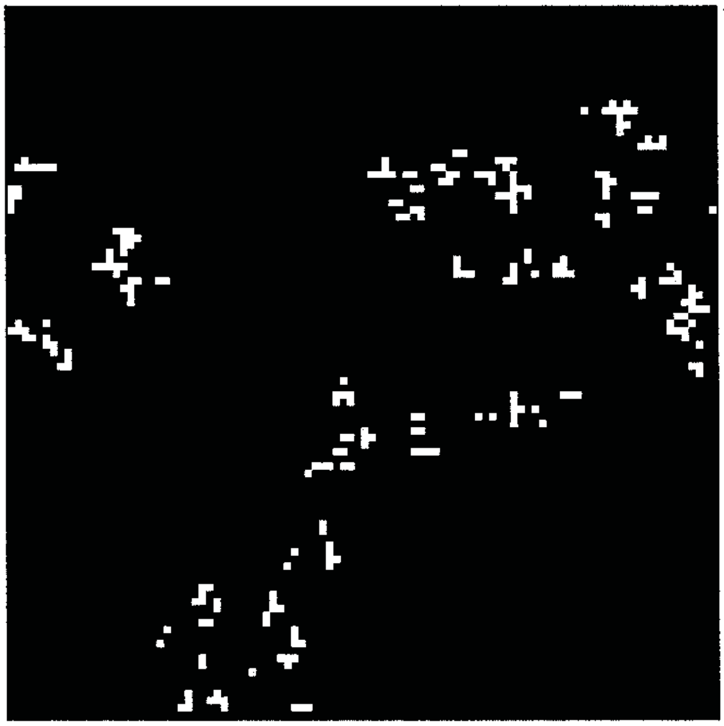
Snapshot:

Kooperateure weiß, b=1.4, K=0.1 $\Rightarrow$ c=0.515

spatial evolutionary PD game

Szabo und Töke - 1997

Ergebnisse - 4 Nachbarn



- Kleines c

  Für c→0 können die Kooperateure überleben, wenn sie verstreute Kolonien bilden. Generell sind kompakte Formationen besser, wie auch immer die Kooperationskolonien reduziert werden.

spatial evolutionary PD game
Szabo und Töke - 1997
Ergebnisse - 4 Nachbarn

- Beobachtung der zeitlichen Entwicklung
  - Mittelpunkt, Größe und Form von Kolonien ändern sich kontinuierlich
  - separierte Kolonie kann spurlos verschwinden
  - Kolonien vereinigen oder teilen sich

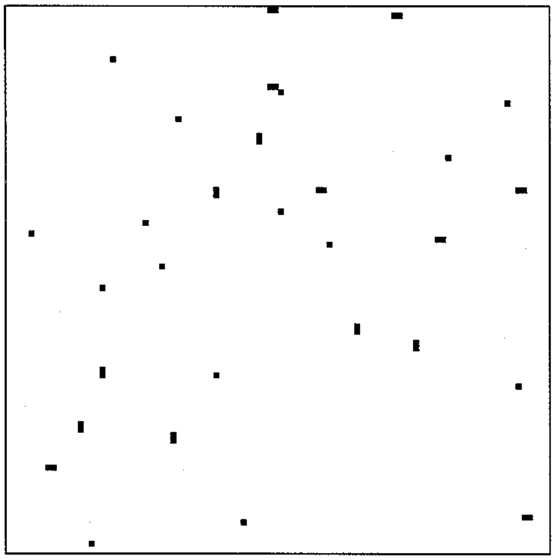
  $\Rightarrow$ ähnliche Effekte bei einer Klasse von dynamischen Prozessen namens directed percolation

- MC-Bild 1 zeigt Potenzgesetzverhalten bei b$\rightarrow$ b_{c2} mit :

$$c \propto (b_{c2} - b)^{\beta} \tag{8}$$

  bester Fit: b_{c2}=1.8472 und β=0.56, was konsistent ist mit dem kritischen Exponenten aus dem 2-d directed percolation ($\beta \approx 0.58$)

spatial evolutionary PD game
Szabo und Töke - 1997
Ergebnisse - 4 Nachbarn



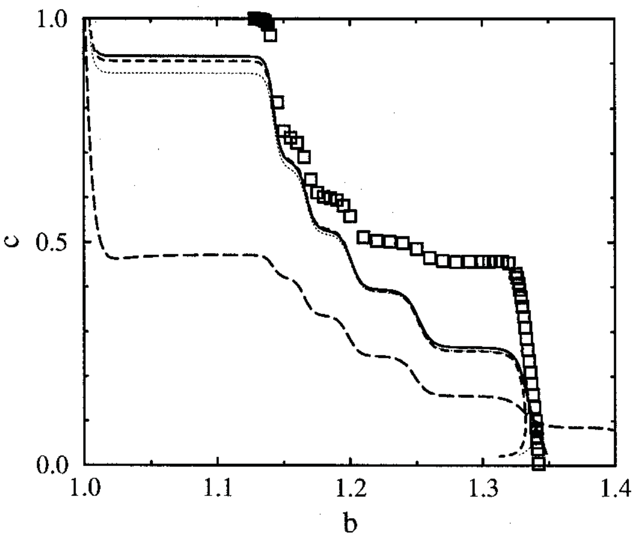
b=1.222 und K=0.1

- kleine isolierte Gangs bilden sich aus

- Defektor in Umgebung von Kooperateuren erhält höchste Fitness
  weiterer Defektor wird entstehen, falls b<4/3 wird einer bald zerstört ⇒ random walking

- Gangs können sich vereinen, teilen und spurlos verschwinden

spatial evolutionary PD game
Szabo und Töke - 1997
Ergebnisse - 8 Nachbarn



K=0.02

- kleine Unterschiede zu 4er Modell
  - b_{c1} und b_{c2} kleiner
  - Konvergenz der MFT langsamer
    $\Rightarrow$ kurzreichweitige Wechselwirkungen werden wichtiger

- für höheres K $\Rightarrow$ Angleichung von MC und MFT und Potenzgesetz

- niedrigeres K $\Rightarrow$ Stufen deutlicher

Das Gefangenendilemma als evolutionäres Spiel

Literatur

- Spieltheorie:

  A. K. Dixit, B.J. Nalebuff:

  Spieltheorie für Einsteiger; Schäffer-Poeschel Verlag

  (nette Einführung mit guten, anschaulichen Beispielen)

  Holler, Illing:

  Einführung in die Spieltheorie; Springer-Verlag

  (fundierte Einführung, Kapitel über Evolutorische Spieltheorie)

- spatial evolutionary PD game:

  Szabo, Töke:

  Evolutionary prisoner's dilemma game on a square lattice; cond-mat/9710096

  (in Literaturangabe viele einführende Paper angegeben)