Risk management

Value-at-Risk
und
Portfolio-Optimierung nach Markowitz

1. Was ist Risiko?
   (a) Volilität
   (b) Sicherheitshorizont
   (c) Value-at-Risk
2. utility functions
3. Markowitz-Theorie
   (a) unkorrelierte assets
   (b) korrelierte assets

Risiko und Volatilität

$x(T)$ — Preis des Wertpapiers (*asset*) X zur Zeit T

logarithmischer Return nach Zeit T:

$$R(T) = \log\left(\frac{x(T)}{x_0}\right) \qquad (1)$$

$P(x,T)$ — Wahrscheinlichkeitsverteilung von $x(T)$

Volatilität σ = Standardabweichung von $R(T)$

$$\sigma^2 = < R^2(T) > - < R(T) >^2 \qquad (2)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{T}\left[\int dx P(x,T) R^2(T) - \left(\int dx P(x,T) R(T)\right)^2\right] \qquad (3)$$

$N = T/\tau$ diskrete Kursänderungen:

$$x(T) = x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \qquad \text{mit } \delta x_k = x_k \eta_k$$

$$\Rightarrow R(T) = \sum_{k=0}^{N-1} \log(1 + \eta_k)$$

$N \to \infty$:
$R(T)$ gaußverteilt mit
Mittelwert $\tilde{m}T =< \log(1 + \eta_k) > T/\tau$ und
Standardabweichung $\sigma\sqrt{T}$.

$$\Rightarrow x(T) = x_0 \exp(\tilde{m}T + \sigma\sqrt{T}\zeta)$$

mit ζ (0,1)-normalverteilte Zufallsvariable.

Unterschied zwischen (a)*wahrscheinlichstem Wert* $x(T)$ und (b)*Mittelwert* von $x(T)$:

(a) $= x_0 \exp(\tilde{m}T)$

(b) höher, für Gauß: $x_0 \exp(\tilde{m}T + \sigma^2 T/2)$

———————————————————————

(Folie zu Formel 4)

Value at Risk:

Λ vorgegeben: Wahrscheinlichkeit dafür, daß keine Verluste größer als Λ gemacht werden

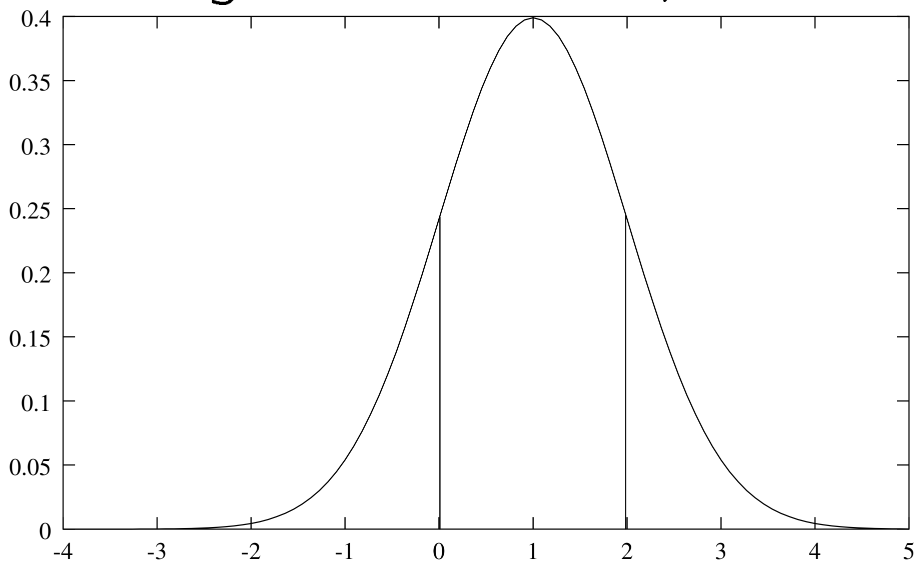
p_{VaR} vorgegeben: VaR ist Maximalverlust mit Sicherheit 1-p.

$$\mathrm{erf}(\Lambda) = 2\Phi_0(\sqrt{2}\Lambda) = 2p(\sqrt{2}\Lambda) - 1$$

´Sicherheitshorizont´

$$\hat{T} \equiv \frac{\tilde{m}^2}{\sigma^2}$$

Für $T = \hat{T}$ folgt: $\tilde{m}T = \sigma\sqrt{T}$.



Gaußverteilung $\sigma\sqrt{T} = \tilde{m}\, T$

Nach $\hat{T}$ Jahren "Gewinnzone" wahrscheinlich:

$$P(R(T) > 0) = (0,68 + (1 - 0,68)/2) = 0,84$$

Value-at-Risk

$$p_{\mathsf{VaR}} = p(\delta x < -\Lambda_{\mathsf{VaR}}) = \int_{-\infty}^{-\Lambda_{\mathsf{VaR}}} d\delta x P_\tau(\delta x) \tag{4}$$

Falls $P_\tau(\delta x)$ gaußverteilt mit Standardabweichung $\sigma_1 = \sigma x_0 \sqrt{\tau}$ und Mittel m_1:

$$p_{\mathsf{VaR}} = p\left(\delta x < -\frac{\Lambda_{\mathsf{VaR}} + m_1}{\sigma_1}\right)$$

$$\Lambda_{\mathsf{VaR}} = \sqrt{2}\sigma_1 \mathrm{erfc}^{-1}(2p_{\mathsf{VaR}}) - m_1$$

Wahrscheinlichkeit größten Verlustes

Betrachte $N = T_{\mathsf{VaR}}/\tau$ Intervalle:

$$P(\Lambda, N) = N\{p(\delta x > -\Lambda_{\mathsf{VaR}})\}^{N-1} P_\tau(-\Lambda) \quad (5)$$

utility functions

W_T — "wealth" zum Zeitpunkt T

utility function (Nutzenfunktion) $U(W_T)$

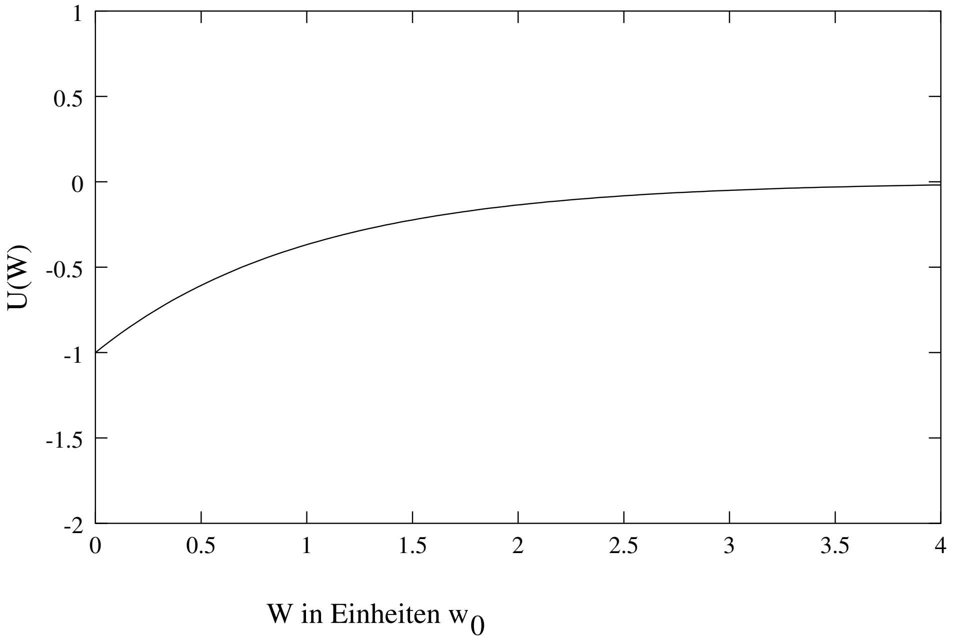
- zweimal differenzierbar

- $\frac{d^2U}{dW_T^2} < 0$

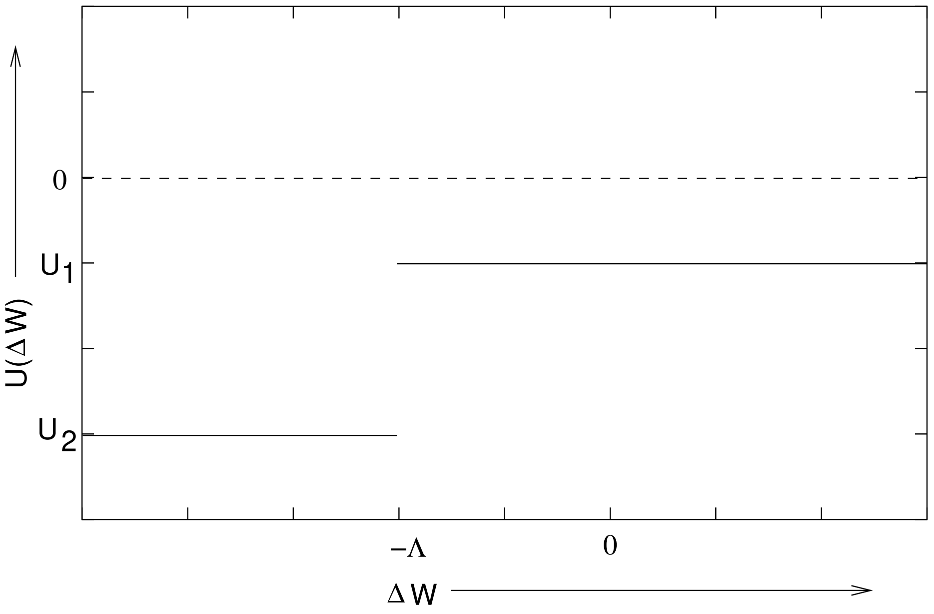
$P(W_T)$ Gaußverteilung mit Mittel $W_0 + mT$ und Varianz DT:

$$< U >= -\exp\left[-\frac{W_0}{w_0} - \frac{T}{w_0}(m - \frac{D}{2w_0})\right] \qquad (6)$$

Theoretische utility function



tatsächliche utility function



Portfolios ausunkorrelierten Wertpapieren

Gesamtbestand W zusammengesetzt aus M Wertpapieren,
davon je n_i einer Sorte zum Preis x_i^0.

relativer Anteil an W: $p_i = n_i x_i^0 / W$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{M} p_i = 1$

Durchschnittliche Returns m_i und Varianzen $D_i = (\sigma x_i^0)^2$ als bekannt angenommen.
$(T \gg \hat{T})$

o.B.d.A.: $W = 1$ und $x_i^0 = 1$.

Durchschnittlicher Return des Portfolios m_p:

$$m_p = \sum_{i=0}^{M} p_i m_i = m_0 + \sum_{i=0}^{M} p_i (m_i - m_0) \qquad (7)$$

Gesamtvarianz des Portfolios:

$$D_p = \sum_{i=1}^{M} p_i^2 D_i \qquad \text{mit } D_0 = 0 \qquad (8)$$

Extremum unter Nebenbedingung (7):

$$\left. \frac{\partial (D_p - \zeta m_p)}{\partial p_i} \right|_{p_i = p_i^*} = 0 \quad (i \neq 0) \qquad (9)$$

(Folie mit Formel 8:)

Betrachte Zeitraum T.

(8) gilt nur bei unabhängigen X_i´s $\rightarrow$ Gauß

Minimierung von (8) ohne Nebenbedingung führt zu: Alles in risikolose Anlage.

Maximierung von Return $\Rightarrow$ Alles in Anlage mit maximalem m_i.

(8) gilt es unter der Nebenbedingung (7) zu minimieren.

(Folie mit Formel 10:)

Ergebnis:
Erlaubt ist Parabelebene mit Effizienzkurve(ζ).

- gebe m_p vor

oder

- gebe schlimmsten "Drawdown" $\frac{D_p^*}{2m_p} = \frac{\zeta}{4}$ vor

$$\Rightarrow 2p_i^* D_i = \zeta(m_i - m_0) \tag{10}$$

(10) in (7) ergibt Gl. $\zeta(m_p)$:

$$m_p - m_0 = \frac{\zeta}{2} \sum_{i=1}^{M} \frac{(m_i - m_0)^2}{D_i} \tag{11}$$

$$D_p^* = \frac{\zeta^2}{4} \sum_{i=1}^{M} \frac{(m_i - m_0)^2}{D_i} \tag{12}$$

Portfolio ohne risikoloses Wertpapier

zweiter Langrange-Multiplikator ζ' für

$$\sum_{i=1}^{M} p_i = 1$$

Lösung:

$$p_i^* = \frac{\zeta m_i + \zeta'}{2D_i} \tag{13}$$

$\zeta = 0$ und Einsetzen der Lösung in Nebenbedingung:

$$p_i^* = \frac{1}{ZD_i} \quad \text{mit } Z = \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{D_i} \tag{14}$$

$$\Rightarrow D_p^* = \frac{1}{Z}$$

Für $D_i \simeq D \quad \forall i \qquad \Rightarrow Z \simeq M/D$.

$\zeta = 0$ heißt: Keine Nebenbed. für Return, nur risikominimales Portfolio gesucht.

(14) erhält man durch einsetzen in Nebenbed.:

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{\zeta'}{2D_i} = 1 \Leftrightarrow \zeta' = \frac{2}{\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{D_i}} = \frac{2}{Z}$$

$$\Rightarrow p_i^* = \frac{2}{2D_i Z}$$

Falls alle Varianzen ungefähr gleich:

$$D_p = \sum_{j=1}^{M} p_i^2 D_i = \sum \frac{1}{Z^2 D_i^2} D_i$$

$$= \frac{1}{Z^2} \sum \frac{1}{D_i} = \frac{1}{Z}$$

Gesamtvarianz ist M-mal kleiner als Einzelvarianzen.

Weitere Nebenbedingungen denkbar:
keine Short-positionen: $p_i^* \geq 0 \Rightarrow$ immer noch eindeutige Lösung
komplizierter: begrenzte oder möglichst kleine Anzahl verschiedener Wertpapiere

(Folie mit Formel 16:)

O_{ia} bestimmt, wie stark Faktor e_a die Entwicklung von x_i bestimmt.

Portfolios korrelierter Wertpapiere

Korrelationen zwischen Kursschwankungen δx_i:

$$C_{ij} =< \delta x_i \delta x_j > -m_i m_j \tag{15}$$

Basiswechsel zu unabhängigen, gaußverteilten "Wirtschaftsfaktoren" e_a
mit Mittel 0 und Varianz D_a:

$$\delta x_i = m_i + \sum_{i=1}^{M} O_{ia} e_a \qquad < e_a e_b >= \delta_{ab} D_a \tag{16}$$

(16) in (15):

$$C_{ij} = \sum_{a,b=1}^{M} O_{ia} O_{jb} < e_a e_b > = \sum_{a,b=1}^{M} O_{ia} O_{ja} D_a \tag{17}$$

In Matrixschreibweise: $C = O\hat{D}O^{\dagger}$.
$\Rightarrow D_a$´s sind Eigenwerte zu C.

Gesamtportfolio:

$$\text{Mittelwert:} \quad m_p \;= m_0 + \sum_{i=1}^{M} p_i(m_i - m_0) \tag{18}$$

$$\text{Varianz:} \quad D_p \;= \sum_{i,j=1}^{M} p_i p_j C_{ij} \tag{19}$$

Minimierung von D_p mit Lagrange-Parameter ζ für Nebenbedingung (18)

$$\Rightarrow 2 \sum_{i=1}^{M} C_{ij} p_j^* = \zeta(m_i - m_0) \tag{20}$$

$$\Leftrightarrow p_i^* = \frac{\zeta}{2} \sum_{i=1}^{M} C_{ij}^{-1}(m_i - m_0) \tag{21}$$

ζ ergibt sich dabei aus:

$$m_p - m_0 = \frac{\zeta}{2} \sum_{i,j} C_{ij}^{-1}(m_j - m_0)(m_i - m_0) \tag{22}$$

risikominimales Portfolio ohne risikolose Anlagemöglichkeit m_0:

$$p_i^* = \frac{1}{Z} \sum_{j=1}^{M} C_{ij}^{-1} \quad \text{mit } Z = \sum_{i,j=1}^{M} C_{ij}^{-1} \qquad (23)$$

Fazit

Risikomessung und Portfolio-Optimierung bei gaußverteilten Kursschwankungen recht einfach, da dies auf der Basis von Varianzen geschieht.

I.A. ist jedoch der Value-at-Risk $\neq$ Standardabweichung.

Realistischere Verteilungen (exp. oder potenzartig) erfordern u.a. Berücksichtigung der Kurtosis oder gar abstrakter Größen, die die praktische Anwendung unmöglich machen.