Das Lux-Marchesi-Modell

Seminar
EconoPhysics

Sommersemester 1999

Christel Kamp

Wiederholung

Effizienter Markt

Alle Agenten haben vollständige Information über den gesamten Markt. Der Preis eines Gutes ist die direkte Folge von Informationen über Gewinnaussichten, d.h. Informationen über den Fundamentalwert (intrinsischen Wert) dieses Gutes.

No-Arbitrage-Prinzip

In einem effizienten Markt gibt es keine risikolose Gewinnmöglichkeit, d.h. der Wert eines risikolosen Portfolio steigt mit der Zinsrate des Marktes.

Aktienpreismodelle

Einfache Aktienpreismodelle gehen von einer Lognormalverteilung der Aktienkurse aus. D.h. der Aktienkurs $S(t) = S_t$ unterliegt einem exponentiellen Wachstum, das von Gaußschem Rauschen überlagert wird.

$$dS = \mu_0 S dt + \sigma_0 S dz$$

$$S(t) = S_0 e^{\sigma_0 z(t) + (\mu_0 - \frac{1}{2}\sigma_0^2)t}$$

$\mu_0 S$	Driftrate
$\sigma_0 S$	Rauschamplitude
$dz = \epsilon\sqrt{dt}$	ϵ N(0,1)-verteilte Zufallsgröße
$z(t)$	Standard-Wiener-Prozeß
σ_0	Volatilität

Dies kann als Kontinuumslimes aus dem Cox-Ross-Rubinstein-Modell gewonnen werden.

Returns

I.a. werden nun nicht die Aktienkurse selbst sondern die *Returns*

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

betrachtet. In dem bisher betrachteten einfachen Modell hat man also folgende Beziehung:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \sigma_0 z(t) + (\mu_0 - \frac{1}{2}\sigma_0^2)t$$

Die Returns unterliegen also hier einer Normalverteilung mit

Varianz	σ_0^2
Erwartungswert	$\mu_0 - \frac{1}{2}\sigma_0^2$

$(\Delta t = 1\ !)$

Für größere Zeitskalen ($\Delta t \geq 1$ Monat) stimmt dies sehr gut mit den empirischen Daten überein.

Charakteristika realer Märkte

1. **„fat tails"**

   Die Returns hochfrequenter Märkte ($\Delta t <$ 1 Monat) unterliegen keiner Normalverteilung. Die Verteilungsfunktion fällt asymptotisch nach einem Potenzgesetz ab:

   $$P(ret < y) = F(y) = 1 - ay^{-\alpha}$$

2. **„volatility clustering"**

   - Die Volatilität ist zeitabhängig, Zeiten eines ruhigen Marktes wechseln ab mit Perioden starker Kursschwankungen.

   - Während die zeitliche Korrelation der Returns schnell zerfällt, besteht eine langfristige Korrelation in den absoluten Returns, d.h. in der Größe der Schwankungen.

Korrelationen in den Kursschwankungen

$$\delta S(t) = \delta_{\Delta t} S(t) = S(t + \Delta t) - S(t)$$

$\langle ... \rangle = \langle ... \rangle_t$ stehe für eine Mittelung bzgl.t

Varianz:

$$Var(\delta S(t)) = \langle \delta S(t)^2 \rangle - \langle \delta S(t) \rangle^2$$

Autokorrelationsfunktion:

$$C(\tau) = \frac{\langle \delta S(t) \delta S(t + \tau) \rangle - \langle \delta S(t) \rangle \langle \delta S(t + \tau) \rangle}{Var(\delta S(t))}$$

$C(\tau) \approx 0$ für $\tau > 15$ min

Verallgemeinerte (nichtlineare) Korrelationsfunktion:

$$\delta(t) = \delta S(t) = \delta_{\Delta t} S(t)$$

$$C_f(\tau) = \frac{\langle f(\delta(t)) f(\delta(t + \tau)) \rangle - \langle f(\delta(t)) \rangle \langle f(\delta(t + \tau)) \rangle}{Var(f(\delta(t)))}$$

Korrelation bleibt auch für große Werte von τ erhalten, besonders langreichweitige Korrelationen werden für die Betragsfunktion beobachtet.

Was bestimmt die Dynamik eines realen Marktes ?

1. **Hypothese des effizienten Marktes**

   Das Verhalten der Preise am Markt ist eine unmittelbare Folge äußerer Einflüsse, insbesondere der verfügbaren Informationen über den zugrunde liegenden Fundamentalwert.

2. **„Behavioural Finance“**

   Die Dynamik des Marktes ist nicht allein auf äußere Einflüsse zurückzuführen. Die Preisentwicklung ist auch eine Folge der gegenseitigen Wechselwirkung, der die Agenten am Markt unterliegen, also auch eine Konsequenz innerer Prozesse.

Das Marktmodell von Lux und Marchesi versucht der Antwort der obigen Frage näherzukommen.

Das Lux-Marchesi-Modell

Es gibt zwei Gruppen von Agenten am Markt:

1. **Fundamentalisten** nehmen an, daß der Preis dem Fundamentalwert folgt (Hypothese des effizienten Marktes) und kaufen (verkaufen), falls der Preis p tiefer (höher) liegt als der angenommene Fundamentalwert p_f.

2. **Chartists / Noise Traders** entnehmen ihre Entscheidungsgrundlage bzgl. Transaktionen am Markt den aktuellen Preistrends (Charts) und der vorherrschenden Stimmung am Markt (Tendenz zu „Herdenverhalten“).

   - **Optimisten** kaufen

   - **Pessimisten** verkaufen

Die Dynamik dieses Marktes ist durch Übergänge zwischen den obigen Gruppen bestimmt.

N	Anzahl der Agenten am Markt
n_c	Anzahl der Chartists
n_f	Anzahl der Fundamentalisten ($N = n_c + n_f$)
n_+	Anzahl der Optimisten
n_-	Anzahl der Pessimisten ($n_c = n_+ + n_-$)
x	Meinungsindex $x = \frac{n_+ - n_-}{n_c}$
z	Anteil der Chartists $z = \frac{n_c}{N}$
p	Marktpreis
p_f	Fundamentalwert

Übergangswahrscheinlichkeiten:

1. **Optimisten $\leftrightarrow$ Pessimisten**

Pessimist$\rightarrow$Optimist $\pi_{+-} = v_1 z \exp(U_1)$
Optimist$\rightarrow$Pessimist $\pi_{-+} = v_1 z \exp(-U_1)$

$$U_1 = \alpha_1 x + \frac{\alpha_2}{v_1}\frac{dp}{dt}\frac{1}{p}$$

v_1	Frequenz der „Meinungsüberprüfung“
α_1	Einfluß der Stimmung am Markt („flow“)
α_2	Einfluß des aktuellen Preistrends („chart“)

2. **Fundamentalisten $\leftrightarrow$ Optimisten**

Fund.$\rightarrow$Opt. $\qquad \pi_{+f} = v_2 \frac{n_+}{N} \exp(U_{2,1})$

Opt.$\rightarrow$Fund. $\qquad \pi_{f+} = v_2 \frac{n_f}{N} \exp(-U_{2,1})$

$$U_{2,1} = \alpha_3 \left(\underbrace{\frac{r}{p} + \frac{1}{v_2}\frac{dp}{dt}\frac{1}{p} - R}_{Opt.Profit} - \underbrace{s \left| \frac{p_f - p}{p} \right|}_{Fund.Profit} \right)$$

α_3	Maß für die Übergangsbereitschaft
v_2	Frequenz der „Meinungsüberprüfung“
r	nominale Dividende
R	mittlerer realer Profit der Agenten am Markt
s	Abdiskontierung der Profite, da erst in der Zukunft verfügbar

Bei den Fundamentalisten ist zu berücksichtigen, daß längerfristig der Dividendenterm gerade dem mittleren Profit des Marktes $R = \frac{r}{p_f}$ entpricht.

3. **Fundamentalisten $\leftrightarrow$ Pessimisten**

Fund.$\rightarrow$Pess. $\qquad \pi_{-f} = v_2 \frac{n_-}{N} \exp(U_{2,2})$

Pess.$\rightarrow$Fund. $\qquad \pi_{f-} = v_2 \frac{n_f}{N} \exp(-U_{2,2})$

$$U_{2,2} = \alpha_3 \underbrace{\left(R - \frac{r}{p} - \frac{1}{v_2}\frac{dp}{dt}\frac{1}{p}\right.}_{Pess.Profit} - \underbrace{\left. s\left|\frac{p_f - p}{p}\right|\right)}_{Fund.Profit}$$

Im Gegensatz zu den Optimisten verkaufen die Pessimisten das in Frage stehende Gut. Es wird ihnen also der durchschnittliche Profit am Markt zugesprochen, der mit den Profiten (oder auch Verlusten !) der Optimisten verglichen wird.

Preisänderungen

Die Anpassung des Preises als Konsequenz von Angebot und Nachfrage („excess demand“) erfolgt durch einen außenstehenden Auktionator, wobei die entsprechenden Größen folgendermaßen definiert sind:

1. **Angebot und Nachfrage**

$$ED_c = (n_+ - n_-)t_c$$

   Beitrag der Chartists,
   t_c mittleres Handelsvolumen pro Transaktion

$$ED_f = n_f \gamma \frac{p_f - p}{p}$$

   Beitrag der Fundamentalisten,
   γ Maß für die Reaktionsstärke

$$ED = ED_c + ED_f$$

2. **Anpassung des Preises**

Es erfolgt eine Anpassung des Preises um

$$\Delta p = \pm 0.001 p$$

mit der Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \pi_{\uparrow p} &= max[0, \beta(ED + \mu)] \\ \pi_{\downarrow p} &= -min[\beta(ED + \mu), 0] \end{aligned}$$

β	Maß für die Geschwindigkeit des Auktionators
μ	Rauschterm

Fundamentalwert (Input!)

Die Returns des Fundamentalwertes unterliegen einer Normalverteilung:

$$\ln\left(\frac{p_{f,t}}{p_{f,t-1}}\right) = \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Einflüsse von außen sind also nur durch Gaußsches Rauschen gegeben.

Theorie

Annahme:

x,z und p unterliegen einer Verteilung mit scharfem Maximum für N hinreichend groß

$\Rightarrow$ gekoppeltes DGL-System für die zeitliche Entwicklung der Mittelwerte von x,z und p

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f_x(x, z, p) \\
\frac{dz}{dt} &= f_z(x, z, p) \\
\frac{dp}{dt} &= f_p(x, z, p)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 1. Bedingungen für stationäre Lösungen
2. Stabilitätsuntersuchungen

Stationäre Lösungen

1.(a) $x_{stat} = 0, \quad p_{stat} = p_f$, z beliebig

(b) $x_{stat} = 0, \quad z_{stat} = 1$, p beliebig

(c) $z_{stat} = 0, \quad p_{stat} = p_f$, x beliebig

2. Es gibt keine stationären Lösungen mit $x_{stat} \neq 0$ und $p_{stat} \neq p_f$

1.(a)$\Rightarrow$ 1. ausgeglichenes Verhältnis von Optimisten und Pessimisten
2. Preis folgt Fundamentalwert
3. keine Vorteile in den einzelnen Gruppen

Die Fälle 1.(b) und 1.(c) sind unrealistisch und werden auch in der Simulation ausgeschlossen.

Stabilität stationärer Lösungen

Gleichgewichtszustand mit
$x_{stat} = 0$, $p_{stat} = p_f$ und z beliebig

$\Rightarrow$ Bedingungen für <u>Instabilität</u> :

- Wenn α_1 einen bestimmten Wert übersteigt, d.h. wenn die Tendenz zur „Herdenbildung“zu groß wird, kann es keine stabile stationäre Marktsituation geben.

- Entsprechend können Bereiche von z angegeben werden, die zu instabilen Gleichgewichten führen. In der Simulation wählt man den Startwert von z derart, daß stabile stationäre Konfigurationen entstehen können.

Allerdings können nicht direkt Aussagen über Gebiete stabiler Gleichgewichte gemacht werden.

Ergebnisse der Simulation

1. **Globale Stabilität**

   - Dynamik des Maktes ist global stabil
   - Marktpreis folgt dem Fundamentalwert
   - Hypothese des effizienten Marktes langfristig nicht verletzt

2. **„volatility clustering“**

   zufällige Annäherung des Anteils der Chartists an einen kritischen Wert
   ⇒ Phasen der Instabilität gekennzeichnet durch große Volatilität
   ⇒ Restabilisierung durch resultierenden Zuwachs in der Gruppe der Fundamentalisten

   (**„on-off-intermittency“**)

3. **Autokorrelationen**

- Autokorrelation in den Returns zerfällt sehr schnell

- langreichweitige Korrelationen in den absoluten Returns (vgl.2)

4. **„fat tails“**

Die hochfrequenten Returns unterliegen einer Verteilung, die asymptotisch nach einem **Potenzgesetz** verschwindet.

$$\begin{aligned} P(ret < y) = & \quad F(y) & = 1 - ay^{-\alpha} \\ 2 \leq & \quad \alpha & \leq 5 \\ N & \quad \approx & 500 \end{aligned}$$

maximale Preisschwankungen beschränkt

$\Rightarrow$ alle Momente in einem beliebig großen Markt dieser Art sollten existieren

???

! Die Dynamik dieses Markts stabilisiert sich mit wachsender Agentenzahl. Die Verteilung der Returns nähert sich dabei einer Normalverteilung an.

„volatility clustering“und das Auftreten von „fat tails“sind also zwei Phänomene, die nur gemeinsam auftreten. So kann „volatility clustering“mit der Konsequenz besonders großer absoluter Returns als ein Ansatz zum Verständnis der Entstehung der beobachteten Potenzgesetze herangezogen werden.

Fazit

- Das Modell reproduziert wesentliche Charakteristika realer Märkte. Jedoch sind die statistischen Eigenschaften der Preise am Markt offenbar keine unmittelbare Folge der Informationen über den Fundamentalwert (Hypothese des effizienten Marktes), sondern entwickeln sich aus der inneren Dynamik des Marktes.

- Die Destabilisierung des Marktes erfolgt hier zufällig. Es wäre interessant zu untersuchen, ob es Mechanismen gibt, die den Markt in systematischer Weise an den Rand der Stabilität bringen („self-organized criticality“).

- Es bleibt zu untersuchen, wie weit diese Ergebnisse durch geeignete Wahl der Parameter oder ggf. Modifikationen am Modell mit realen Marktdaten zur Deckung gebracht werden können.

Literatur

1. T.Lux, M.Marchesi *Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market*, Letters to Nature **397** (1999)

2. T.Lux, M.Marchesi *Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market* (1998)

3. T.Lux, M.Marchesi *Volatility Clustering in Financial Markets: A Micro-Simulation of Interacting Agents* (1998)

4. E.Egenter,T.Lux, D.Stauffer *Finite size effects in Monte Carlo simulations of two stock market models*

5. T.Galla *Option Pricing - Die Black-Scholes-Formel*, Ausarbeitung zum Vortrag im Rahmen des EconoPhysics-Seminar im WS 98/99