Das Hochzeitsproblem
Econophysics-Seminar

Christel Kamp

20.Oktober 1998

Beim *Hochzeitsproblem*, in der Literatur i.a. als „*stable marriage problem*" bezeichnet, geht es darum, aus zwei Gruppen mit jeweils N Mitgliedern stabile Paar-Konfigurationen zu erzeugen, wobei die Präferenzlisten eines jeden Mitgliedes bzgl. der Mitglieder der jeweils anderen Gruppe zu berücksichtigen sind. Wie der Name schon sagt, beschreibt dieses Modell z.B. eine Situation, in der es darum geht, N Männer und N Frauen für alle Beteiligten zu möglichst zufriedenstellenden Paaren zusammenzuführen. Dieses Modell ist jedoch (ggf. mit gewissen Modifizierungen) auch auf andere Probleme anwendbar: So kann man z.B. auch an die Vergabe von Arbeits- oder Studienplätzen denken. Dem Titel folgend soll hier nun aber im folgenden auf die Bildung von Paaren zwischen Männern und Frauen Bezug genommen werden.

1 Welche Anforderungen werden an eine Konfiguration von Paaren gestellt?

Aus den $N!$ möglichen Konfigurationen $\mathcal{K} = \{(m_i, w_i), i = 1...N\}$ werden diejenigen als *stabil* bezeichnet, in denen es keinen Mann und keine Frau gibt, die sich einander ihrem aktuellen Partner vorziehen. Um diese Stabilitätsforderung etwas kompakter schreiben zu können werden nun folgende Bezeichnungen eingeführt:

$f(w, m)$ - Position des Mannes m auf der Präferenzliste der Frau w
$h(m, w)$ - Position der Frau w auf der Präferenzliste des Mannes m

Die Einträge dieser Matrizen können als Maß für die Zufriedenheit einer Person in einer Verbindung, bzw. im übertragenen Sinne als Kosten oder Energien, angesehen werden.

Definition
Eine Konfiguration $\mathcal{K} = \{(m_i, w_i), i = 1...N\}$ heißt *stabil*, falls es keinen Mann m_i und keine Frau w_j,$i \neq j$, gibt, mit:

$$\begin{aligned} f(w_j, m_i) &< f(w_j, m_j) \\ h(m_i, w_j) &< h(m_i, w_i) \end{aligned}$$

Die „mittlere Energie“pro Frau bzw. Mann beträgt:

$$\epsilon_F(\mathcal{K}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(w_i, m_i) \tag{1}$$

$$\epsilon_H(\mathcal{K}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h(m_i, w_i) \tag{2}$$

Die „mittlere Energie “pro Paar beträgt:

$$\epsilon(\mathcal{K}) = \epsilon_F(\mathcal{K}) + \epsilon_H(\mathcal{K}) \tag{3}$$

Eine stabile Konfiguration heißt *optimal* für die Männer (für die Frauen), wenn jeder Mann (jede Frau) mindestens so zufrieden ist, wie unter einer beliebigen anderen stabilen Konfiguration.Soweit nicht explizit darauf hingewiesen wird, soll *optimal* im folgenden optimal für die Männer heißen.

Bemerkung
Existiert eine optimale Konfiguration, so ist diese eindeutig.

2 Stabile Konfigurationen und der Gale-Shapley-Algorithmus

Satz 1:
Für das Hochzeitsproblem läßt sich immer eine Lösung finden, d.h. es existiert immer eine stabile Konfiguration von Paaren unabhängig davon, wie die Präferenzlisten der Männer und Frauen ausfallen.

Der Beweis erfolgt konstruktiv durch Angabe des (Männer-orientierten) Gale-Shapley-Algorithmus:

1.Schritt:

1. Jeder Mann bewirbt sich bei der Frau, die ganz oben auf seiner Päferenzliste steht.

2. Jede freie Frau nimmt zunächst jede Bewerbung an, eine bereits vergebene Frau entscheidet sich für den von ihr bevorzugten Mann.

$\vdots$

n. Schritt

1. Jeder Mann, der im vorigen Schritt eine Absage erhalten hat,bewirbt sich bei der Frau, die er unter den Frauen, bei denen er sich noch nicht beworben hat, bevorzugt (also bei der nächsten Frau auf seiner Liste)
2. Die Frauen verhalten sich wie in Schritt 1,Punkt 2

Der Algorithmus bricht ab, wenn jede Frau mindestens eine Bewerbung erhalten hat. Dies erfordert maximal N^2-2N+2 Iterationen. Die so generierte Konfiguration von Paaren ist stabil.

Satz 2:
Der (Männer-orientierte) GALE-SHAPLEY-Algorithmus liefert immer eine optimale Konfiguration (für die Männer).

Definition:
Ein Partner heißt *möglich* für einen Mann oder eine Frau, wenn es eine stabile Konfiguration gibt, in der dieser als sein bzw. ihr Partner auftritt.

D.h. der GALE-SHAPLEY-Algorithmus weist jedem Mann die beste für ihn mögliche Frau zu.

Bemerkung:
Es ist nicht selbstverständlich, daß immer eine stabile Konfiguration existiert. Beim „roommate-problem“ ist dies nicht allgemein der Fall.

3 Verknüpfung der Energien

Satz 3:
Unter dem GALE-SHAPLEY-Algorithmus gilt für große N und für zufällige, voneinander unabhängige Aufstellung der Präferenzlisten:

$$\epsilon_H(\mathcal{K}_H) \approx \ln N \tag{4}$$

$$\epsilon_F(\mathcal{K}_H) \approx \frac{N}{\ln N} \tag{5}$$

Bis jetzt wurde nur die Männer-optimale Konfiguration generiert. Man erhält alle anderen stabilen Konfigurationen durch zyklische Vertauschung der Partner in Untergruppen von Paaren (*Rotationen*):

$$(\mu_1,\omega_1)...(\mu_r,\omega_r) \rightarrow (\mu_1,\omega_2)...(\mu_r,\omega_1) \tag{6}$$

Hierbei ist r die *Rotationslänge* der *Rotation*. Dies wird klar, wenn man die Möglichkeit der Scheidung in einer stabilen Konfiguration berücksichtigt und mit dieser Startbedingung den GALE-SHAPLEY-Algorithmus erneut anwendet. Hierbei wird sich die Situation der Frauen zunehmend verbessern bis schließlich nach geeigneten Rotationen die Frauen-optimale Konfiguration erreicht ist. Ist diese identisch mit der Männer-optimalen Konfiguration, so ist die stabile Konfiguration eindeutig. Dies wird jedoch nur für kleine N realisiert.

Satz 4:
Für die mittleren Energien pro Mann ϵ_H bzw. pro Frau ϵ_F in stabilen Konfigurationen und für große N gilt:

$$\epsilon_H \epsilon_F = N \tag{7}$$

Hierbei kann die minimale mittlere Energie der Ordnung $\ln N$ einer Gruppe nicht weiter reduziert werden.

4 Dynamik zwischen stabilen Konfigurationen und Skalenverhalten

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt besprochen werden die stabilen Konfigurationen durch Rotationen verbunden, so daß man hierüber sukzessive vom Männer-optimalen zum Frauen-optimalen Zustand gelangen kann. Hierbei ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Frau ω_1 ihren Zustand durch eine Scheidung verbessert, d.h. keine „virtuelle Rotation" auslöst, durch folgende Abschätzung gegeben:

$$\frac{f(\omega_1, \mu_1)}{N} \approx \frac{\epsilon_F}{N} \approx \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{8}$$

D.h. für etwa $\sqrt{N}$ Frauen bringt eine Scheidung eine Verbesserung.

Schließlich kann noch folgende Verteilung der auftretenden Rotationslängen beobachtet werden:

$$P(r, N) = \frac{1}{r_0(N)} \rho \left(\frac{r}{r_0(N)} \right) \tag{9}$$

$$\rho(x) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2} \tag{10}$$

Hierbei beobachtet man folgendes Skalenverhalten der *typischen Rotationslänge* r_0:

$$r_0(N) \approx \sqrt{N} \tag{11}$$

Dieses Skalenverhalten wird einsichtig, wenn man folgende Überlegungen anstellt:

Da jeder der r an der Rotation beteiligten Männer etwa $\frac{N}{\epsilon_F}$ zusätzliche Bewerbungen anstellt, erhält jede Frau etwa $\frac{r}{\epsilon_F}$ weitere Angebote. Dies gilt natürlich auch für Frau ω_1, die allerdings nur ein Angebot erhält (Abbruchbedingung).Mit der Annahme, daß ϵ_F von der Größenordnung $\sqrt{N}$ ist, folgt aber gerade das beobachtete Skalenverhalten.
Ebenso erhält man, daß sich die mittlere Energie pro Mann ϵ_H bei solch einer Rotation etwa um eins erhöht.

5 Verhalten zu global optimalen Konfigurationen

Minimiert man die mittle Energie pro Paar in einer Konfiguration ϵ, also die normierte Gesamtenergie, unter der Randbedingung der Stabilität, d.h.unter Berücksichtigung der Relation $\epsilon_F \epsilon_H = N$, so erhält man:

$$\epsilon_{min}^{stab} = 2\sqrt{N} \qquad (12)$$

Berücksichtigt man jedoch nicht diese Stabilitätsbedingung und bestimmt das globale Minimum der Gesamtenergie, so ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\epsilon_{min} = 1.617\sqrt{N} \qquad (13)$$

Die Aufgabe der Stabilitätsforderung führt also noch einmal zu einer beachtlichen Reduktion der Gesamtenergie.

6 Strategisches Verhalten

Es stellt sich natürlich die Frage, was passiert, wenn die Frauen aus stratetischen Gründen falsche Präferenzen vortäuschen. Der Gale-Shapley-Algorithmus wird natürlich auch in diesem Fall eine bzgl. der vorgegebenen Präferenzen stabile Konfiguration generieren.
Doch ist die ausgebene Konfiguration tatsächlich stabil, d.h. auch bzgl. der wirklichen Präferenzen der Frauen? Können Frauen ihre Situation durch „strategische Lügen“gar verbessern?
Daß dies unter gewissen Voraussetzungen tatsächlich möglich ist, soll hier exemplarisch dargestellt werden:
Zu betrachten ist ein Problem, bei dem folgende Präferenzlisten angegeben werden:

Mann	Frauen		
1	2	1	3
2	1	2	3
3	1	2	3

Frau	Männer		
1	1	3	2
2	3	1	2
3	1	2	3

Dies liefert die folgenden Konfigurationen:

Mäner-orientierter Algorithmus: (1,2),(2,3),(3,1) $\epsilon_H = \frac{4}{3}$ $\epsilon_F = \frac{6}{3}$
Frauen-orientierter Algorithmus: (1,1),(2,3),(3,2) $\epsilon_H = \frac{7}{3}$ $\epsilon_F = \frac{4}{3}$

Wenn nun Frau 1 fälschlicherweise angibt ihr bevorzugter Mann sei Mann 1 gefolgt von Mann 2 und schließlich Mann 3, so bewirkt sie, daß der von ihr tatsächlich bevorzugte Mann sich im Laufe des Zuordnungverfahrens auch bei ihr bewerben muß, was ja sonst nicht der Fall ist. Abgesehen von dieser eher egoistischen Intention bewirkt sie aber auch, daß sowohl der Männer- als auch der Frauen-orientierte Algorithmus die Konfiguration liefern, die zuvor nur der Frauen-orientierte Algorithmus lieferte. Es gibt also nur noch eine stabile Konfiguration von Paaren, die zudem optimal für die Frauen ist. Während es also für die Gruppe, die die Bewerbungen ausspricht, am vorteilhaftesten ist, die wahren Präferenzen anzugeben, kann es für die andere Gruppe also durchaus sehr vorteilhaft sein, dies nicht zu tun. Allgemein kann man sogar zeigen, daß eine generierte Konfiguration stabil ist sowohl gegenüber den vorgegebenen als auch den tatsächlichen Präferenzen, falls die wahren Präferenzen der Männer bekannt sind und die Frauen durch ihre vorgegeben Präferenzlisten die für sie „beste mögliche Antwort“ darauf geben. Eine ausführlichere Darstellung dieses Problems findet sich in [3].

Literatur

[1] D.Gale,L.S. Shapley *College admissions and the stability of marriage*,American Math. Monthly **69**,9 (1962)

[2] M.J. Oméro, M.Dzierzawa, M.Marsili, Y.C.Zhang *Scaling Behavior in the Stable Marriage Problem* cond-math/9708181 (1997)

[3] E.Wolfstetter *Economics of Matching: The Marriage Problem*, http://www.wiwi.hu-berlin.de/wt1/dp96.htm (1996)

[4] J.Larsen *A Parallel Approach to the Stable Marriage Problem*, http://serv1.imm.dtu.dk/documents/users/jla/br97-5.html (1997)

[5] *Stable Marriage Problem*, http://mta.bkkl.hu/ stsmork/stuff/wedding/wedding.html