Binomialmodell für Optionspreise und Hedging

André Ewering

16. November 1998

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Das n-Perioden-Binomialmodell liefert den Ansatz, um faire Preise von europäischen Call-Optionen zu berechnen. Mit der sogenannten Binomialen-Optionsformel ist dies möglich. Sie stellt eine Vorstufe zur berühmten Black-Scholes-Optionsformel dar, die 1973 von den Herren Black, Scholes und Merton abgeleitet wurde. 1997 gab es für diese Entdeckung sogar den Nobelpreis für Wirtschaft. Bevor wir jetzt anfangen wollen, das Binomialmodell zu konstruieren, sollten einige Begriffe geklärt werden.

1.1 Wichtige Begriffe

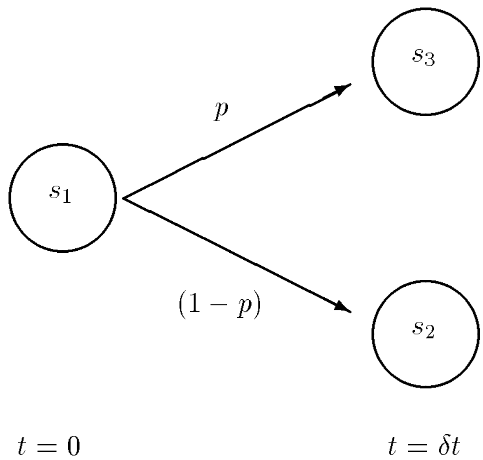
- Bond: risikofreie, festverzinste Anlage oder Kreditaufnahme
- Stock: Aktie
- Future: Vereinbarung/Vertrag über einen zuküftigen Handel (von Aktien oder Waren)
- Option: Optionsschein (europäische Option)
  - Call-Option: sichert mir das Recht zu, eine Aktie zu einem fest vorher vereinbarten Preis kaufen zu können
  - Put-Option: analog zur Call-Option ein Verkaufsrecht
- Portfolio: Kombination der in einer Handelsperiode gehaltenen Güter (z.B. Stock und Bond)

2 Das Binomialmodell für einen Zweig

Wir möchten einen realen Finanzmarkt modellieren. Damit dies einigermaßen funktioniert, braucht man zwei Dinge, einen Bond und einen Stock. Der Stock unterliegt in natürlicher Weise gewissen Preisschwankungen, so wie man das vom turbulenten Aktiengeschäft auch gewohnt ist. Der Bond gibt an, daß Geld nicht unbedingt immer einen festen Wert haben muß. Er beschreibt somit den Zeitwert von Geld. Wie sieht dies nun konkret im Binomialmodell aus?

2.1 Die Konstruktion des Zweiges

Der Stock bzw. die Aktie kann sich wie folgt entwickeln. Zu einer Zeit $t = 0$ habe die Aktie den Wert s_1. Zu einer kurzen Zeit später $t = \delta t$ kann der Aktienpreis auf einen Wert s_3 steigen oder auf einen Wert s_2 fallen. Das Binomialmodell für einen Zweig sieht eine Stagnation des Aktienpreises nicht vor, was sofort einsichtig erscheint. Ein konstant bleibender Preis der Aktie ist äquivalent zu einem Bond. Weiter kann man noch sagen, daß der Preis mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p steigt oder mit $(1-p)$ fällt. Dieser Sachverhalt läßt sich schön mit einem Graphen darstellen.



Die Kringel wollen wir von nun an Knoten und die Linien wollen wir Pfade nennen. Der Bondwert stellt, wie schon erwähnt, in unserem Modell den Mechanismus dar, der den Zeitwert von Geld festlegt. Auf einen oder aus einem Bond läßt sich beliebig viel Geld transferieren. Aus Gründen der Vereinfachung sei die Zinsrate (genannt r) unseres Bonds stets konstant. Ein zur Zeit $t = 0$ angelegter Euro habe wenig später $t = \delta t$ den Wert $\exp\{r\delta t\}$. Dabei wird die Exponentialfunktion wird Diskontierungsfaktor genannt. Legt man allgemeiner einen Bond B_0 an, so hat man wenig später $B_0 \exp\{r\delta t\}$.

2.2 Der Future

Mit Bond und Stock haben wir nun das Instrumentarium, das unsere Welt darstellt und in dieser auch unser Binomialmodell leben soll. Der simulierte Markt birgt für Investoren Risiken aber auch Möglichkeiten Geld mittels einer Anlagestrategie zu erwirtschaften. Wir müssen nun eine Funktion bereitstellen, die in der Lage ist, Gewinne und Verluste darzustellen. Wir wollen einen Future, einen zuküftigen Handel, beschreiben. Ich verkaufe jemanden einen Future, also schließe mit ihm einen Handel über einen Aktienkauf mit Handelspreis k ab. Dieser Handel verpflichtet meinen Vertragspartner zu einem festgesetzten Zeitpunkt γ-Stück Aktien zum festgesetzten Preis k pro Aktie zu kaufen, egal wie der aktuell Aktienkurs aussieht. Meine Gewinn- bzw. Verlustfunktionen haben damit die Form:

$$f(3) = \gamma\,(s_3 - k)$$

$$f(2) = \gamma\,(s_2 - k)\,.$$

Es ist sofort einsichtig, daß dieser Handel große Risiken für micht birgt. Wie kann ich es schaffen mich gegen ein Risiko abzusichern? Das macht man so. Ich stelle mir zur Zeit ein Portfolio (ϕ, ψ) aus Stock und Bond zusammen. Zur Zeit $t = 0$ kaufe ich ϕ-Stück Aktien zum Preis s_1 pro Stück. Schön, wie bezahle ich die Aktien, wieviel Geld muß ich zurücklegen, um mich abzusichern? Das Problem löst man durch eine Kreditaufnahme, was ja nichts anderes ist als ein Bond mit einem negativen Vorzeichen. Also, ich kaufe ψ-Stück des Bonds B_0, so daß das Portfolio den Gesamtwert

$$\phi s_1 + \psi B_0.$$

hat. Nun lasse ich die Zeit δt verstreichen und schaue mir an, wieviel mein Portfolio jetzt wert ist, nämlich:

$$\phi s_3 + \psi B_0 \exp\{r\delta t\}$$

$$\phi s_2 + \psi B_0 \exp\{r\delta t\}\,,$$

falls der Aktienkurs steigt oder fällt. Dieses Portfolio soll nun meinen verkauften Future absichern, d.h. die Gewinn- bzw. die Verlustfunktionen von oben müssem gleich meinem Portfolio zur Zeit $t = \delta t$ sein. Ich konstruiere mir ein Nullsummenspiel mit

$$f(3) = \phi s_3 + \psi B_0 \exp\{r\delta t\}$$

und

$$f(2) = \phi s_2 + \psi B_0 \exp\{r\delta t\}\,.$$

Mit diesen Gleichungen wird nun gerechnet. Nach Vorrausstzung ist $s_2 \neq s_3$, der Stock wäre andernfalls nur ein Bond, so daß man nach einfacher Rechnung die Beziehungen

$$\phi = \frac{f(3) - f(2)}{s_3 - s_2} \tag{1}$$

und

$$\psi = B_0^{-1} \exp\{-r\delta t\} \left\{ \frac{s_3 f(2) - s_2 f(3)}{s_3 - s_2} \right\} \tag{2}$$

erhält. Was leisten diese Gleichungen? Bis hierher nur so viel, daß eine bekannte Kursentwicklung der Aktien, über die ich einen Future abgeschlossen habe, das Portfolio, bestehend aus einem Kredit und gekauften Aktien derselben Sorte, vollständig festlegt.

3 Das No-Arbitrage-Prinzip und Hedging eines Claims

Was ist das No-Arbitrage-Prinzip? Dieses für unser Modell fundamentale Prinzip verhindert die Möglichkeit, risikolosen Profit zu machen. Dazu ein kleines Beispiel:
Angenommen eine bestimmte Aktie wird an der New Yorker und der Frankfurter Börse gehandelt. Der Kurs in New York betrage jetzt einmal 100 Euro pro Aktie und in Frankfurt 102 Euro. Wenn jemand dies merkt, dann wird er meinetwegen 100 Aktien in New York kaufen und dann in Frankfurt verkaufen. Er wird dann 200 Euro risikolosen Profit machen. Die Folgen seiner Transaktion auf dem Markt sind sofort klar. Der Frankfurter Aktienpreis wird leicht steigen, der New Yorker wird wird fallen und die Preise werden sich gegeneinander einpendeln.
Da der Aktienmarkt mehr oder weniger transparent ist, werden somit auftretende Arbitragemöglichkeiten schnell wieder verschwinden, d.h. sie spielen keine große Rolle. Für das Modell werden wir eine Arbitragemöglichkeit nicht zulassen und man führt somit das No-Arbitrage-Prinzip ein. Dieser Sachverhalt ermöglicht es erst unser Binomialmodell weiter zu entwickeln.
Sei nun V der Preis, um ein bestimmtes Portfolio zu kaufen, so ist:

$$\begin{aligned} V &= \phi s_1 + \psi B_0 \\ &= s_1 \left(\frac{f(3) - f(2)}{s_3 - s_2} \right) + \exp\{-r\delta t\} \left(\frac{s_3 f(2) - s_2 f(3)}{s_3 - s_2} \right). \end{aligned} \tag{3}$$

Ist dieser Preis dieses Portfolios (ϕ, ψ) eindeutig? Ein Antwort darauf gibt jetzt das No-Arbitrage-Prinzip. Dieser Preis ist eindeutig!
Um das zu zeigen, stellen man sich vor, daß ein anderer Anbieter auf dem Markt eine andere Kombination $(\phi, \psi)_P$ zu einem geringeren Preis P anbietet. Man weiß nun, daß in Zukunft $(t = \delta t)$ die Preise beider Portfolien übereinstimmen, also ist $V_{\delta t} = P_{\delta t}$. Und genau in dieser Situation läßt sich risikofreier Profit machen.
Sei also $V \geq P$, dann wird man sein Portfolio V verkaufen und das preiswertere kaufen. Die Differenz $(V - P)$ legt man bei einer Bank an. Dann läßt man die Zeit δt verstreichen und man erwirtschaftet einen Gewinn von $\exp\{r\delta t\}(V - P)$. Zum Ende tauscht man noch das neue Portfolio gegen das alte, was nicht mit Kosten verbunden ist, da der Preis ja derselbe ist. Die Argumentation läuft natürlich für den Fall $V \leq P$ ähnlich. Da nun das No-Arbitrage-Printip gelten soll, müssen die Preise V und P schon zur Zeit $t = 0$ übereinstimmen.

3.1 No-Arbitrage und Call-Option

Das No-Arbitrage-Prinzip möchte man nun für den Fall einer europäischen Call-Option (im Gegensatz zur amerikanischen ist hier der Tag des Handels genau festgelegt) diskutieren. Die Future-Funktionen $f(.)$ werden also zu Claim-Funktionen oder Call-Funktionen $C(.)$ und die Portfolioentwicklungen sind gegeben durch:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & \phi s_3 + \psi B_0 \exp\{r\delta t\} \\
\phi s_1 + \psi B_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \phi s_2 + \psi B_0 \exp\{r\delta t\}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & \gamma C(3) = max(s_3 - k, 0) \\
\phi s_1 + \gamma C(1) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \gamma C(2) = max(s_2 - k, 0)
\end{tikzcd}$$

$t = 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $t = \delta t$

Wie sind die Maxima in den Claim-Funktionen zu erklären? Wie schon früher erwähnt, finden Futures auf jeden Fall statt. Call-Optionen hingegen werden nur dann eingelöst, wenn zu dem Tag, an dem der Call ausgeübt wird, der aktuelle Aktienpreis, über dem Preis k liegt, zu dem gecalled werden kann. Andernfalls verfällt die Option, d.h. der nominelle Wert ist Null. Ein Bankinstitut möchte nun Call-Optionen verkaufen. Sie möchte sich aber auch gegen Verlust aber auch gegen Gewinn absichern, das berühmte Nullsummenspiel soll also herauskommen. Es ist zu Zeit $t = \delta t$:

$$\begin{aligned}
\gamma C(3) &= \phi s_3 + \psi B_0 \exp\{r\delta t\} \\
\gamma C(2) &= \phi s_2 + \psi B_0 \exp\{r\delta t\}.
\end{aligned}$$

Bei $t = 0$ greift das no-arbitrage-Prinzip. Denn, stimmen die Preise bei $t = \delta t$ überein, dann müssen sie bereits vorher ($t = 0$) übereinstimmen, also ist:

$$\begin{aligned}\gamma C(1) &= \phi s_1 + \psi B_0 \\ &= \gamma s_1 \left(\frac{C(3) - C(2)}{s_3 - s_2} \right) + \gamma \exp\{-r\delta t\} \left(\frac{s_3 C(2) - s_2 C(3)}{s_3 - s_2} \right). \quad (4)\end{aligned}$$

$C(1)$ ist der faire Preis der Call-Option, die die Bank verkauft. Abgesichert wird diese Option durch den Ankauf von Aktien über die auch die Option ausgestellt ist und eine Kreditaufnahme.
Es bleibt noch die Überschrift zu klären. Was ist ein Claim und was ist Hedging? Die Bank verkauft jemanden eine Option, die ihm das Recht gibt Aktien zu einem festgestzten Preis zu kaufen. Die Differenz des so offerierten Kaufpreises und des Aktienpreises heißt Claim. Ein Claim so also der Wert eines Calls. Die Konstruktion des Nullsummenspiels wird Hedge genannt. Ein Portfolio (ϕ, ψ) mit $\lambda C(i) = \phi s_i + \psi B$ heißt Hedge eines Claims C(i).

3.2 Ein Zahlenbeispiel

Es seien folgende Werte gegeben:

- Aktie kostet im Moment: $s_1 = 100$ Euro
- mögliche Entwicklungen der Aktie: $s_3 = 120$ Euro bzw. $s_2 = 90$ Euro
- wähle festen Dikontierungsfaktor: $\exp\{r\delta t\} = 1,06$
- eine Bank verkauft $\lambda = 15$ Call-Optionen, die je einen Kaufpreis von $k = 100$ Euro pro Aktie offeriert
- die Größe B_0, die nur eine Einteilung in viele Schuldscheine darstellt, sei 1

Wie kann ich mich als Bank da Calls absichern und was ist der faire Preis eines Calls? Dazu nimmt man die bereits bekannten Formeln:

$$\phi \quad = \quad \gamma \frac{C(3) - C(2)}{s_3 - s_2}$$

und

$$\psi \quad = \quad \gamma B_0^{-1} \exp\{r\delta t\} \left\{ \frac{s_3 C(2) - s_2 C(3)}{s_3 - s_2} \right\}.$$

Berechnet man die Claimwerte $C(3) = max(20, 0) = 20$ und $C(2) = max(-10, 0) = 0$, so findet man $\psi = -849,06$ Euro, $\phi = 10$ Stück und $C(1) = 10,06$ Euro.

3.3 Eine Umnotation

Bevor wir jetzt das Binomialmodell für einen Zweig auf den allgemeineren Fall, einen Baum, anwenden, führen wir die folgende neue Variable ein:

$$q = \frac{s_1 \exp\{r\delta t\} - s_2}{s_3 - s_2}, \tag{5}$$

so daß jetzt ist:

$$C(1) = \exp\{r\delta t\}\{(1-q)C(2) + qC(3)\}. \tag{6}$$

Die γ's sind nun herausgekürzt, so daß C(1) der Wert für eine Call-Option ist. Die größe q mit $0 < q < 1$ läßt sich als Wahrscheinlichkeit interpretieren, was man mit einiger Rechnung sieht. Man betrache die Definition für q, dann ist:
$q \leq 0$ und $s_1 \exp\{r\delta t\} \leq s_2 < s_3$. Mit (4) und kurzer Rechnung sieht man:

$$C(1)\exp\{r\delta t\} = \phi s_1 \exp\{r\delta t\} + \underbrace{\psi B_0 \exp\{r\delta t\}}_{=C(2)-\phi s_2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \underbrace{C(1)\exp\{-r\delta t\} - C(2)}_{>0} = \phi\left(s_1 \exp\{-r\delta t\} - s_2\right)$$

$$\Rightarrow s_1 \exp\{r\delta t\} - s_2 > 0 \Rightarrow q > 0.$$

Der Ausdruck unter der Klammer ist > 0, da für eine Option $C(2) = 0$ ist. Der andere Fall verhält sich analog, denn:
$q \geq 1$ und $s_1 \exp\{r\delta t\} \geq s_3$. Eine weitere kurze Rechnung liefert:

$$C(1)\exp\{r\delta t\} = \phi s_1 \exp\{r\delta t\} + \underbrace{\psi B_0 \exp\{r\delta t\}}_{=C(3)-\phi s_3}$$

$$\Leftrightarrow 0 > \underbrace{C(1)\exp\{r\delta t\} - C(3)}_{<0} = \phi\left(s_1 \exp\{r\delta t\} - s_3\right)$$

$$\Rightarrow s_1 \exp\{r\delta t\} - s_3 < 0 \Rightarrow q < 1.$$

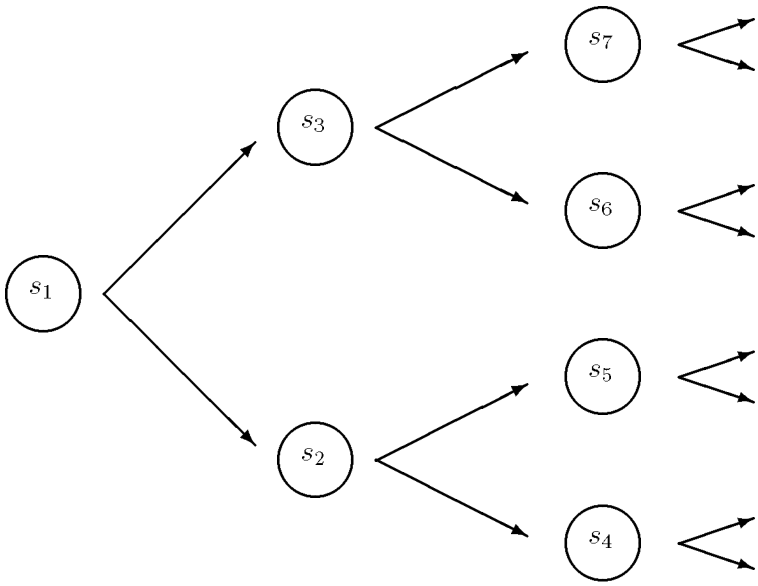
Hier ist der Ausdruck unter der Klammer gezwungen < 0. Andernfalls hätte man ja keine Aktien gekauft, sondern alles in einen Bond gesteckt.

4 Der Baum

Obwohl der Zweig die Instrumente des Marktes beinhaltet, stellt er sicher nur ein Minimalmodell dar. Wir vervollständigen das Binomialmodell und gehen daher vom Zweig zum Baum.

4.1 Stock und Bond im n-Perioden-Modell

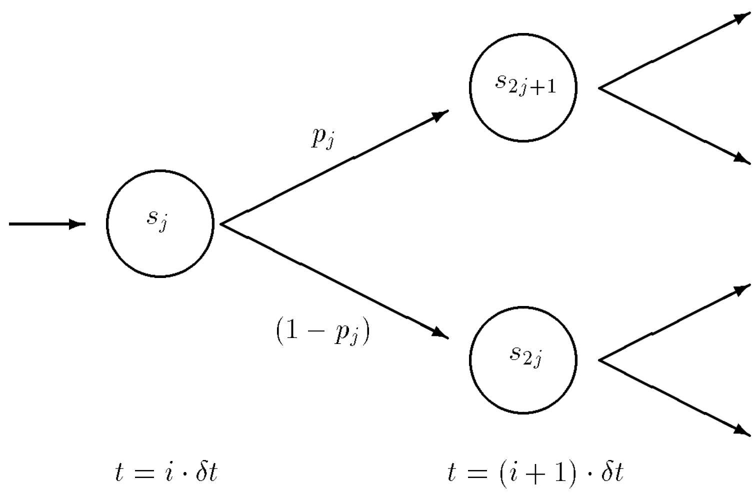
Im Baum gibt es ebenfalls einen Stock und einen Bond. Es lassen sich weiterhin beliebig viele Transaktionen durchführen, die mit keinerlei Kosten verbunden sein sollen. Aus vielen Zweigen heraus konstruieren wir den Baum und erhalten den Graphen:



$t = 0$ $t = \delta t$ $t = 2 \cdot \delta t ...$

Der Wert unserer Aktie zur Zeit $t = 0$ betrage nun $S_0 = s_1$. Von hier aus gibt es zwei mögliche Weiterentwicklungen, es werden die Werte s_3 und s_2 angenommen. Zum sukzessiven Aufbau des Baums setzt man das Verfahren induktiv fort. Bei $t = i \cdot \delta t$ besitzt der Baum 2^i Knoten und jeder Knoten hat zwei Möglichkeiten sich weiter zu verzweigen.

Graphisch hat man:

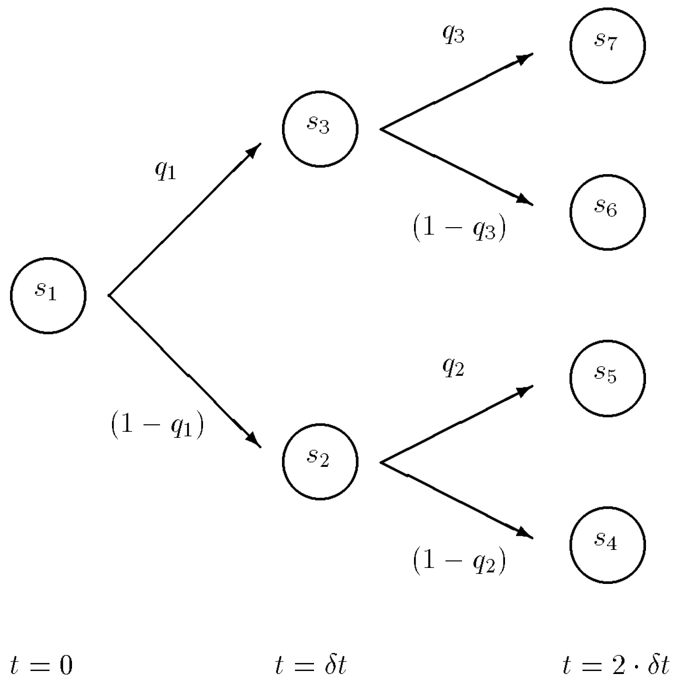


- p_j: Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung (up oder u)
- $(1 - p_j)$: Wahrscheinlichkeit für eine Abwärtsbewegung (down oder d)
- S_{2j+1}: Wert nach einer Aktienpreissteigerung
- S_{2j}: Wert nach einer Aktienpreisverfall

Die Aktienentwicklung ist somit dargestellt. In dem Baum-Modell müssen wir den Bond natürlich auch noch neu definieren. Sicherlich könnte man die Zinsrate für jeden Zeitsprung neu setzen, die Zinsraten schwanken in der realen Welt ebenfalls, aber der Einfachheit halber sei r konstant und der Diskontierungsfaktor des Bonds ergibt sich zu $B_0 \exp\{r \cdot n\delta t\}$ für das Zeitintervall $T = n \cdot \delta t$.

4.2 Der Wert einer Call-Option im Zwei-Perioden-Binomialmodell

Wie kommt man nun an den fairen Preis einer Call-Option? Dazu betrachtet man zunächst das Zwei-Perioden-Binomialmodell. Dieses hat die Form:



Jetzt nimmt man die vorhin abgeleitete Claim-Funktion für einen Zweig und verallgemeinert diese ein wenig. Zur Zeit $t = i \cdot \delta t$ ist für eine Verzweigung:

$$C(j) \quad = \quad \exp\{-r\delta t\}\{q_j C(2j+1) + (1-q_j)C(2j)\}. \tag{7}$$

Für obigen Baum, der ja aus drei Zweigen besteht, lassen sich folgende drei Claimfunktionen hinschreiben:

$$C(3) \quad = \quad \exp\{-r\delta t\}\{q_3 C(7) + (1-q_3)C(6)\},$$

$$C(2) \quad = \quad \exp\{-r\delta t\}\{q_2 C(5) + (1-q_2)C(4)\}$$

und

$$C(1) \quad = \quad \exp\{-r\delta t\}\{q_1 C(3) + (1-q_1)C(2)\}.$$

Die zugehörigen q's lassen sich wie gehabt berechnen, exemplarisch sei hier

$$q_2 = \frac{s_2 \exp\{r\delta t\} - s_4}{s_5 - s_4}$$

angegeben. Substituiert man die ersten Gleichungen in die letzte, so findet man:

$$\begin{aligned} C(1) &= \exp\{-r2\delta t\}\,(q_1 q_3 C(7) + q_1(1-q_3)C(6) + (1-q_1)q_2 C(5) \\ &\quad +(1-q_1)(1-q_2)C(4)). \end{aligned} \tag{8}$$

Noch ein Wort zu den Claim-Funktionen aus dem Baumgeäst. Diese Funktionen sind durch $\gamma C(i) = max(s_i - k, 0)$ definiert. In diesen steckt die Größe k, die festlegt, zu welchem zuküftigen Preis der Besitzer dieser Call-Option Aktien kaufen kann. Dieser Preis wird im Zwei-Perioden-Modell für den Zeitpunkt festgelegt, an der Handel stattfinden soll, also $t = 2\delta t$. Im n-Periodenmodell wird k dementsprechend auf $t = n \cdot \delta t = T$ festgelegt werden.

4.3 Gleichungen für das n-Perioden-Modell

Nimmt man nun die letzte Gleichung her und verallgemeinert diese für n Etappen, so gibt das Anlaß zu folgenden zwei Definitionen:

- Die Wahrscheinlichkeit, der ein Prozeß oder Pfad durch den Baum folgt, ist das Produkt aller Einzelwahrscheinlichkeiten der Pfade. Diese Wahrscheinlichkeit wird Pfadwahrscheinlichkeit genannt.
- Der Wert eines Claims an der Wurzel ist die Summe über alle Endknoten gewichtet mit den Pfadwahrscheinlichkeiten, die zur Wurzel führen. Der Gesamtausdruck wird dann noch mit dem Diskontierungsfaktor für jeden Zeitpunkt versehen.

Damit ergeben sich folgende allgemeine Gleichungen für einen beliebigen Verzweigungspunkt im Baum:

$$q_n = \frac{s_n \exp\{r\delta t\} - s_d}{s_u - s_d}, \tag{9}$$

$$C_n = \exp\{-r\delta t\}\,\{(q_n C_u + (1-q)C_d\}, \tag{10}$$

$$\phi = \frac{C_u - C_d}{s_u - s_d}, \tag{11}$$

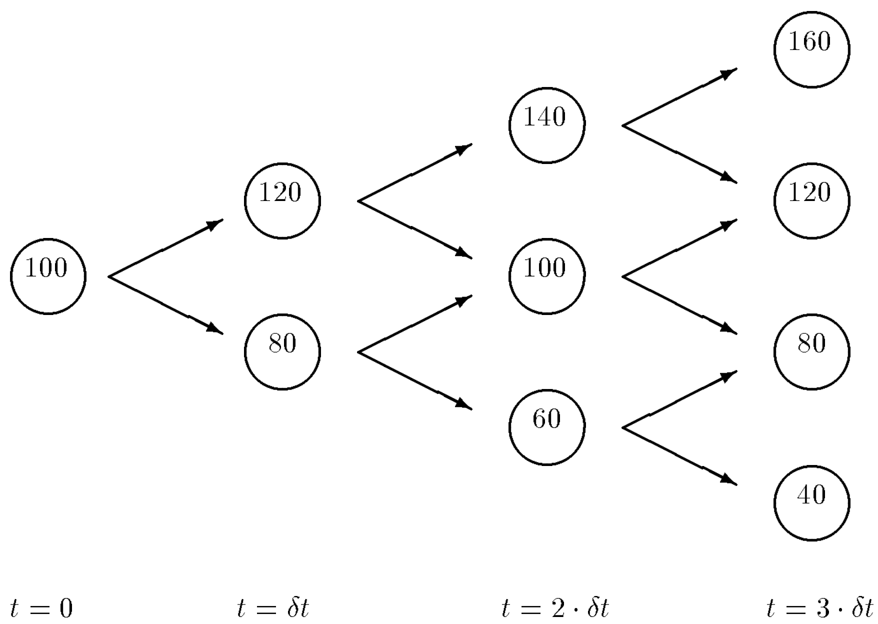
und

$$\psi \quad = \quad B_n^{-1} \exp\{-r\delta t\} (C_n - \phi s_n) \tag{12}$$

mit n = now, u = up und d = down.

4.4 Ein weiteres Zahlenbeispiel

In diesem Beispiel wird ein sogenannter rekombinierter Baum betrachtet. Folgende Aktienkursentwicklungen seien nun gegeben:



Man interessiert sich nun für den Wert einer Call-Option, die zum Zeitpunkt $t = 3 \cdot \delta t$ (europäischer Call) ausgeübt wird. Die Verzinsung betrage einmal $r = 0$, so daß für q

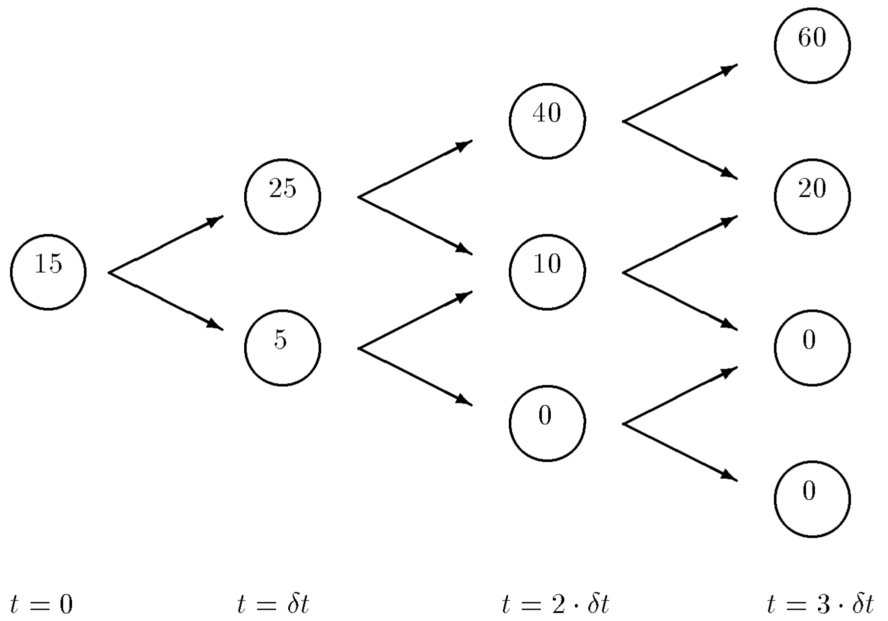
$$q \quad = \quad \frac{s_n - s_d}{s_u - s_d} = \frac{1}{2}$$

und für die Claim-Funktion

$$C_n \quad = \quad \frac{1}{2} C_u + \frac{1}{2} C_d.$$

ist. Nun male man einen neuen Baum und trage die Claims von oben nach unten bis zur Wurzel hin ein. Die Call-Option sei dabei über $k = 100$ Euro ausgestellt.

Als Ergebnis wird man erhalten:



Der faire Preis für die Call-Option beträgt also 15 Euro. Egal welche Kursentwicklung stattfindet, mein System ist immer gehedged. Die Gleichungen sagen, welches Portfolio man in jeder Zeitperiode zusammenstellen muß. Der Claim ist immer gehedged und das läßt sich explizit nachrechnen. Hier eine mögliche Entwicklung:

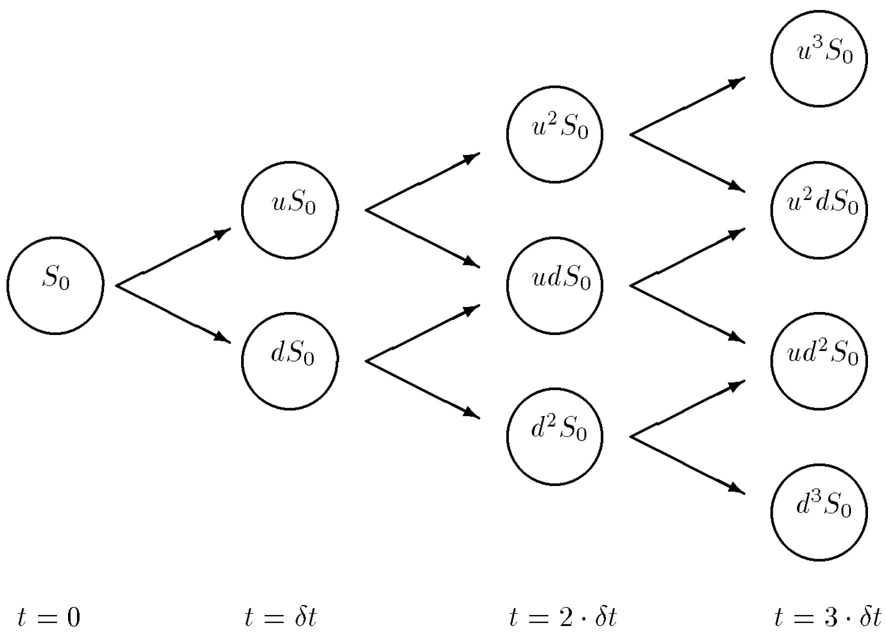
- zur Zeit $t = 0$:
  - bekomme 15 für Option
  - $\phi = (25-5)/(120-80) = 0,5 \Rightarrow$ Aktienkosten: $K = 0,5 \cdot 100 = 50$
  - also leiht man sich 35 Euro
- zur Zeit $t = \delta t$: Aktie fällt auf 80
  - $\phi = (100-0)/(100-60) = 0,25 \Rightarrow$ 0,25 Aktien verkaufen: $G = 0,25 \cdot 80 = 20$
  - reduziere Schulden auf $(35-20) = 15$
- zur Zeit $t = 2\delta t$: Aktie steigt auf 100
  - $\phi = (20-0)/(120-80) = 0,5 \Rightarrow$ 0,25 Aktien kaufen: $K = 0,25 \cdot 100 = 25$
  - erhöhe Schulden auf $(25+15) = 40$

- zur Zeit $t = 3\delta t$: Aktie fällt auf 80
  - Wert der Aktien: $W = 0,5 \cdot 80 = 40$
  - Gesamtschulden: $S = 40$
  - verkaufte Call-Option ist wertlos.

Wie man sieht, hat man hier ein Nullsummenspiel durch eine geignete Zusammenstellung des Portfolios zu jedem Zeitpunkt konstruiert. Nachrechnen zeigt, daß dies auch für alle anderen Pfade in dem Baum gilt.

5 Die Binomiale Optionsformel

Nun soll die Binomiale Optionsformel abgeleitet werden. Wie schon öfters angemerkt, läßt sich mit ihr der faire Preis einer Call-Option berechnen. Die strengen Finanzmathematiker bedienen sich bei der Herleitung den Mitteln der Mathematischen Statistik. Verwiesen sei an dieser Stelle auf [1] bzw. [3]. Hier werden solche tiefgreifenden Begriffe nicht verwendet, was die Ableitung vielleicht etwas rudimentär erscheinen läßt, aber letztendlich führt beides auf dasselbe Ergebnis. Wir betrachten einen rekombinierten Baum der folgenden Art:



Als Startwert der Aktie geben wir S_0 fest vor. Die Aktienpreissteigerungen bzw. Verfälle sein als konstant angenommen. Die Größen s_2 oder s_5 berechnen sich z.B. zu dS_0 bzw. udS_0. Das führt dazu, daß die Wahrscheinlichkeit q bei fest gegebenen u und d für jede Zeitperiode gleich groß ist. Der faire Wert einer Call-Option im Zwei-Perioden-Modell-Binomialmodell beträgt damit:

$$\begin{aligned} C(1) &= \exp\{-r2\delta t\}\,(q^2C(u^2S_0) + 2q(1-q)C(udS_0) \\ &\quad +(1-q)^2C(d^2S_0)) \end{aligned} \tag{13}$$

mit z.B.

$$C(udS_0) = max(udS_0 - k, 0). \tag{14}$$

Für das n-Perioden-Binomialmodell folgt dann:

$$\begin{aligned} C(1) &= \exp\{-r \cdot n\delta t\} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} \cdot max\left(u^j d^{n-j} S_0 - k, 0\right) \right\} \end{aligned} \tag{15}$$

Im Prinzip ist man jetzt schon fertig, denn mit dieser Gleichung läßt sich schon rechnen. Es besteht aber noch die Möglichkeit, diesen Ausdruck schöner zu schreiben. Dazu werden die Call-Funktionen anders ausgedrückt. Gesucht wird ein $\lambda \epsilon N_0$, so da die $max(...)$ zum ersten Mal beitragen. Mit der Forderung $u^\lambda d^{n-\lambda} S_0 - k > 0$ folgt $u^{\lambda+1} d^{n-\lambda-1} S_0 - k > 0$, wegen $u^\lambda d^{n-\lambda} S_0 \cdot \frac{u}{d} - k > 0$, da $\frac{u}{d} > 1$ nach Definition. Damit berechnet sich der faire Preis einer Call-Option zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \exp\{-rT\} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{j=\lambda}^{n} \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} \cdot \left(u^j d^{n-j} S_0 - k, 0\right) \right\} \end{aligned} \tag{16}$$

mit

$$q = \frac{\exp\{r\delta t\} - d}{u - d}. \tag{17}$$

Eine kurze Rechnung liefert dann das Endresultat:

$$\mathcal{X} = S_0 \mathcal{B}[\lambda, n, q^*] - k \exp\{-rT\} \mathcal{B}[\lambda, n, q] \tag{18}$$

mit

$$q^* = u \exp\{-r\delta t\} q. \tag{19}$$

Für $\mathcal{X}$ haben wir nun eine Formel gefunden, die in einem diskreten Modell lebt. Gehen wir damit ins Kontinuum, d.h. wir machen δt sehr klein, so gehen die Binomialverteilungen mittels des zentralen Grenzwertzatzes über in Normalverteilungen. Nach weiterer Rechnung erhält man die berühmte Black-Scholes-Optionsformel.

Literatur

[1] A. Irle (1998), *Finanzmathematik - Die Bewertung von Finanzderivaten*, Teubner

[2] M. Baxter, A. Rennie (1998), *Financial Calculus - An Introduction to derivative pricing*, Cambridge University Press

[3] N. Schmitz (1998), *Bewertung Finanzderivaten - Vorlesung WWU Münster 1998*

[4] J. Hull, *Futures and Other Derivative Securaties, Prentice-Hall*