Beyond Black Scholes

Seminar

EconoPhysics

WS 98/99

Jörn Voigt

Black-Scholes-Modell:

Sei S_t ein Zeitreihe von Aktienkursen, dann ist die relative Änderung des Aktienpreises

$$\begin{aligned}\frac{\Delta S}{S} &= \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \\ &\approx \int_{t-1}^{t} \frac{dS}{S} = \int_{t-1}^{t} d(\log S) = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\end{aligned}$$

normalverteilt mit $E[\Delta y_t] = \mu, Var[\Delta y_t] = \sigma^2$.

Mit $y_T = \log\left[\frac{S_T}{S_0}\right] = \sum_{t=1}^{T} \log\left[\frac{S_t}{S_{t-1}}\right]$ folgt, daß der Logarithmus des Aktienpreises normalverteilt ist gemäß

$$\begin{aligned}F_G^{\mu,\sigma}(y_T) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{y_T} dy \exp\left[-\frac{(y-\mu T)^2}{2\sigma^2 T}\right] \\ &= F_G^{0,1}\left(z = \frac{\log\left[\frac{S_T}{S_0}\right] - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\end{aligned}$$

mit $E[y_T] = \mu T$, $Var[y_T] = \sigma^2 T$.

Der Aktienkurs $S_T = S_0 \exp\left(\mu T + \sigma\sqrt{T} z\right)$ (mit z: $F_G^{0,1}$ verteilt) ist lognormalverteilt:

$$
\begin{aligned}
& F_{LN}\left(x_T = \frac{S_T}{S_0}\right) \\
&= F_G^{\mu,\sigma}\left(y_T = \log x_T\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} \int_0^{x_T} \frac{dx}{x} \exp\left[-\frac{(\log x - \mu T)^2}{2\sigma^2 T}\right].
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsdichte des Black Scholes Aktienpreismodells:

$$
\begin{aligned}
& P_{BS}(S_T, T | S_t, t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{\Delta t}} \frac{1}{S_T} \exp\left[-\frac{\left(\log\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - \mu\Delta t\right)^2}{2\sigma^2\Delta t}\right] \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} D_t e^{\mu\Delta t}\sqrt{\Delta t}} \exp\left[-\frac{\left(S_T - e^{\mu\Delta t} S_t\right)^2}{2D_t^2 e^{2\mu\Delta t}\Delta t}\right] \\
&=: P_G^{\mu, D_t = \sigma S_t}(S_T, T | S_t, t)
\end{aligned}
$$

mit $D_t = D(S_t) := \sigma S_t \approx D = \sigma S_0$ und $\Delta t := T - t$.

Optionspreis in risikofreier Welt

1) Risikoloser Aktienwertzuwachs:

$$\begin{aligned}
\langle S_T \rangle_{BS} &= \int_0^\infty dS_T S_T P_{BS}(S_T, T|S_0, 0) \\
&= S_0 \exp\left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right) \\
&\stackrel{!}{=} S_0 \exp\{rT\} \\
&\Leftrightarrow \mu = r - \frac{\sigma^2}{2}
\end{aligned}$$

Sei $C_t = C(S_t, K, T-t)$ der Optionspreis zum Zeitpunkt t als Funktion

- des Aktienpreises S_t,
- des Basispreises der Option K
- und der Restlaufzeit $T - t$.

2) Optionswert= abgezinster Erwartungswert des Optionpreises am Erfüllungstag:

$$\begin{aligned}
C_t &\stackrel{!}{=} \exp(-r\Delta t)\langle C(T) \rangle_{t,BS} \\
&= \exp(-r\Delta t)\langle S_T - K | S_T \geq K \rangle_{t,BS} \\
&= \exp(-r\Delta t) \int_K^\infty dS_T (S_T - K) P_{BS}(S_T, T|S_t, t)
\end{aligned}$$

⇒ **Black-Scholes**

1) $C_t = S_t F_G^{0,1}(d_1) - K \exp(-r\Delta t) F_G^{0,1}(d_2)$

mit $d_{1/2} = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$

ist fairer Preis der Option zum Zeitpunkt t,
abhängig von direkt bestimmbaren Parametern:

- Restlaufzeit $T - t$
- Festzinsrate r

und der nicht direkt bestimmbaren

- Volatilität σ

unabhängig vom Erwartungswert μ der Aktie

2) Risikofreies Hedgen:

$$\Phi^*_{BS}(S_t, t) = \frac{\partial C(S_t, K, T-t)}{\partial S_t}$$

mit $\Phi^*(S_t, t)$=Anzahl der von der Bank zum Zeitpunkt t gehaltenen Aktien (bei optimaler Strategie).

Volatilität und smile effect

Die Volatilität σ ist nicht direkt bestimmbar, sondern wird aus vorhandenen Marktdaten gewonnen.

• Historische Volatilität: Bestimmung der Volatilität aus der Kursentwicklung.
Diese erweist sich in der Praxis als zu klein und führt zu zu niedrigen Optionspreisen.

• Implizite Volatilität: Bestimmung der Volatilität aus den auf dem Markt realisierten Optionspreisen. Bei festem Aktienkurs S_t sollte σ unabhängig von den Parametern $T - t$ und K sein.
Insbesondere gilt hingegen:
σ ist nicht unabhängig vom Basispreis der Option K
$\rightarrow$ Volatility smile.

Fehler des BS Modells

Die Annahme, daß die relativen Kursänderungen normalverteilt sind, gilt nicht für Aktien-Tagesverteilungen. Tatsächlich ist die Wahrscheinlichkeit großer Kursabweichungen signifikant höher als von der Gaussverteilung prognostiziert.
Fits von Tagesverteilungen zeigen:

$$P(x) \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-\delta|x|)$$

bzw. mit $\alpha \approx 3-4$

$$P(x) \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} |x|^{-(\alpha+1)}.$$

Dieses Verhalten läßt sich charakterisieren durch die Kurtosis

$$\kappa = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

einer (sym.)Verteilung mit dem 4.Moment:

$$\mu_4 := \int_{-\infty}^{\infty} dS_T (S_T - \mu)^4 P(S_T, T|S_0, 0)$$

$$\kappa_{Gauss} = 0, \quad \kappa_{real} \in [2, 50]$$

Wochen- und Monatsverteilungen nähern sich gemäß dem Zentralen Grenzwertsatz einer Gaussverteilung an.

Erweiterung zu Black-Scholes

Abstract: Die Bank gibt eine Option heraus.
ΔW :=Kapital der Bank in Abhängigkeit von ihrer gewählten Strategie $\Phi(S,t)$, wie sie Geld aufnimmt und in Aktien anlegt.
($\Phi(S,t)$ =Anzahl der von der Bank zum Zeitpunkt t gehaltenen Aktien.)

Ziel :

- Erwartungswert $\langle \Delta W \rangle \stackrel{!}{=} 0$, nicht $\Delta W = 0$.
- Bank hedgt nicht exakt, sondern es bleibt ein Risiko

$$R := \langle \Delta W^2 \rangle - \langle \Delta W \rangle^2 = \langle \Delta W^2 \rangle$$

- Gesucht ist die optimale Strategie $\Phi^*(S,t)$, die das Risiko minimiert:

$$\frac{\partial \langle \Delta W^2(\Phi^*) \rangle}{\partial \Phi^*} = 0.$$

- Reproduktion der Black-Scholes-Optionspreisformel C_t und der Black-Scholes-Hedging Strategie $\Phi^*_{BS}(S_t,t)$ mit verschwindendem Risiko R_{BS} im Falle einer Black-Scholes-Verteilung.

Kostenbilanz

Die Bank handelt zu Zeiten $t = 0, \tau, ..., T - \tau$.
Zum Zeitpunkt t hält sie $\Phi_t = \Phi_t(S_t)$ Aktien, mit S_t=Wert der Aktien zur Zeit t.

- $t = 0$

Die Bank hält Φ_0 Aktien mit Wert S_0. Sie leiht sich B_0 Geld und gibt eine Option C_0 heraus:

$$\Phi_0 S_0 - B_0 = C_0$$

- $t = \tau$

Zum Zeitpunkt $t = \tau$ haben die Aktien den Wert S_τ, der Bond B_0 hat den Wert $B_\tau = B_0 e^{r\tau}$, die Option den Wert C_τ:

$$\begin{aligned} & \Phi_0 S_\tau - B_0 e^{r\tau} \cong C_\tau \\ \Leftrightarrow \quad & \Phi_0 S_\tau - \Phi_0 S_0 e^{r\tau} + C_0 e^{r\tau} \cong C_\tau \end{aligned}$$

Die Bank reagiert auf die Aktienpreisveränderung und kauft/verkauft $\Phi_\tau - \Phi_0$ Aktien zum Preis S_τ und nimmt entsprechend diesen Betrag zum Zins r auf bzw. legt zum Zins r diesen Betrag an:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_0(S_\tau - S_0 e^{r\tau}) + (\Phi_\tau - \Phi_0)S_\tau - (\Phi_\tau - \Phi_0)S_\tau \\
&= \Phi_\tau S_\tau - \Phi_0 S_0 e^{r\tau} - (\Phi_\tau - \Phi_0)S_\tau \\
&\cong C_\tau - C_0 e^{r\tau}
\end{aligned}
$$

- $\Rightarrow t = T$

$$
\begin{aligned}
& \Phi_T S_T - \Phi_0 S_0 e^{r\tau} - \sum_{t=\tau}^{T} (\Phi_t - \Phi_{t-\tau}) S_t e^{r(T-t)} \\
= \quad & \sum_{t=0}^{T-\tau} \Phi_t \underbrace{\left[S_{t+\tau} - S_t e^{r\tau}\right]}_{=:\delta S_t} e^{r(T-t-\tau)} \\
\cong \quad & C_T - C_0 e^{rT}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Gesamtkosten der Bank:

$$\Delta W := C_0 e^{rT} - C_T + \Delta W_{trade}$$

mit Handelskosten der Bank:

$$\Delta W_{trade} := \sum_{t=0}^{T-\tau} \Phi_t \delta S_t e^{r(T-t-\tau)}.$$

Allgemeine Optionspreisformel

Im allgemeinen ist es nicht möglich, exakt zu hedgen ($\Delta W = 0$). Stattdessen:

$$\begin{aligned}\langle \Delta W \rangle &= C_0 e^{rT} - \langle C_T \rangle + \langle \Delta W_{trade} \rangle \\ &\stackrel{!}{=} 0.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Der Ausgabe-Optionspreis:

$$C_0 = e^{-rT}\big(\langle C_T \rangle - \langle \Delta W_{trade} \rangle\big)$$

mit

$$\begin{aligned}\langle C_T \rangle &:= \langle max(S_T - K, 0) \rangle \\ &= \int_K^\infty dS (S - K) P(S, T | S_0, 0)\end{aligned}$$

$$\langle \Delta W_{trade} \rangle := \sum_{t=0}^{T-\tau} \langle \Phi_t^* \delta S_t \rangle e^{r(T-t-\tau)}$$

S_t und δS_t sind stochastisch unabhängig:

$\Rightarrow \Phi_t(S_t)$ und δS_t sind unabhängig.

$\Rightarrow \langle \Phi_t^* \delta S_t \rangle = \langle \Phi_t^* \rangle \langle \delta S_t \rangle$

mit

$$\begin{aligned} \langle \Phi_t \rangle &= \int_0^\infty dS_t P(S_t, t|S_0, 0)\Phi_t(S_t) \\ \langle \delta S_t \rangle &= \int_0^\infty dS_t P(S_t, t|S_0, 0)\delta S_t \\ &=: m \neq \text{ fkt}(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \Delta W_{trade} \rangle = m \sum_{t=0}^{T-\tau} \int_{t=0}^\infty P(S_t, t|S_0, 0)\Phi_t(S_t)$$

Da $m \ll \langle S_t \rangle \rightarrow$ Entwicklung in m.

In nullter Odnung von m (m=0):

$$C_0 = e^{-rT} \int_K^\infty dS_T (S_T - K) P(S_T, T|S_0, 0).$$

In kanonischer Erweiterung:

$$C_t = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty dS_T (S_T - K) P(S_T, T|S_t, t).$$

Dies reproduziert die Black-Scholes-Optionsformel für

$P(S_T, T|S_t, t) = P_{BS}(S_T, T|S_t, t) \approx P_G(S_T, T|S_t, t)$

Risiko und optimale Strategie

Def. des Risikos der Bank:

$$R := \langle \Delta W^2 \rangle - \langle \Delta W \rangle^2 = \langle \Delta W^2 \rangle$$

Herleitung der Risikoformel aus:

$$\Delta W^2 = C_0^2 e^{2rT} + C_T^2 + \Delta W_{trade}^2$$
$$+2\Big[(C_0 e^{rT})\Delta W_{trade} - C_0 e^{rT} C_T - C_T \Delta W_{trade}\Big]$$

Erwartungswertbildung +
Näherung: $\langle \delta S_t \delta S_{t'} \rangle \approx D^2(S_t)\Delta t \delta_{t,t'}$ liefert schließlich:

$$\langle \Delta W^2 \rangle \approx \langle \Delta W_0^2 \rangle$$
$$+\Delta t \sum_{t=0}^{T-\tau} \int_0^\infty dS_t D_t^2 P(S_t, t | S_0, 0) \Phi_t^2(S_t) e^{2r\Delta t}$$
$$-2 \sum_{t=0}^{T-\tau} \int_0^\infty dS_t P(S_t, t | S_0, 0) \Phi_t(S_t) e^{r\Delta t}$$
$$\int_K^\infty dS_t'(S_t' - K)(S' - e^{r\Delta t} S_t) P(S_T', T | S_t, t)$$

mit $\langle \Delta W_0^2 \rangle := \langle C_T^2 \rangle - C_0^2 e^{2rT}$
Risikos des ungehedgten Kapitals.

Durch Minimierung von $\langle \Delta W^2 \rangle$

$$\frac{\partial \langle \Delta W^2(\Phi^*) \rangle}{\partial \Phi^*} = 0$$

erhält man die optimale Strategie

$$\Phi_t^*(S_t) = \frac{e^{-r\Delta t}}{\Delta t} \int_K^\infty dS' \frac{S'-K}{D^2(S_t)} (S' - S_t e^{r\Delta t}) P(S', T|S_t, t).$$

Im Black-Scholes Fall $P(S_T, T|S_t, t) = P_{BS}(S_T, T|S_t, t)$ reproduziert dies mittels der Identität

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S_t} P_{BS}(S', T|S_t, t) &= \frac{1}{\sigma^2 S_t \Delta t} \log\left(\frac{S'}{S_t e^{r\Delta t}}\right) P_{BS}(S', T|S_t, t) \\ &\approx \frac{S' - S_t e^{r\Delta t}}{D^2(S_t) \Delta t e^{r\Delta t}} P_{BS}(S', T|S_t, t) \end{aligned}$$

die Black-Scholes-Hedgingformel

$$\Phi_{BS}^*(S_t, t) = \frac{\partial C(S_t, K, t)}{\partial S_t}.$$

Einsetzen von $\Phi_t^*(S_t)$ in $\langle \Delta W^2(\Phi) \rangle$ liefert als Risiko R^* bei optimaler Strategie Φ^*:

$$R^* = \langle \Delta W_0^2 \rangle - \Delta t \sum_{t=0}^{T-\tau} e^{2r\Delta t} \int_0^\infty dS_t D_t^2 P(S_t, t | S_0, 0) \Phi^{*2}_t(S_t)$$

Man kann zeigen, daß aufgrund einer komplizierteren Identität für Gauss'sche Integrale das Hedging-Risiko im Black-Scholes-Fall ($P(S_T, T|S_t, t) = P_{BS}(S_T, T|S_t, t)$ und kontinuierliches Hedging $\tau \to 0$) verschwindet:

$$R^*_{BS} = 0.$$

Im Nicht-Gauss'schen Fall ist $R^* \neq 0$.
$\sqrt{R^*}/\langle S_t \rangle$ kann Werte bis zu 0.25 annehmen.

Optionspreis in 1. Ordnung von m

Momentenentwicklung:

$$\tilde{P}(z, S_t, T-t) = \int_{-\infty}^{\infty} dS e^{iSz} P(S, T|S_t, t)$$
$$=: 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \frac{(iz)^j}{j!}$$

Kumulantenentwicklung:

$$\tilde{P}(z, S_t, T-t) =: \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{(iz)^j}{j!}\right]$$

mit den Kumulanten:

- $c_1 = \mu_1 = m(T-t)$
- $c_2 = \mu_2 = D^2(T-t)$
- $c_3 = 0$ (im Fall einer sym. Verteilung)
- $c_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$

Einsetzen der Kumulantenentwicklung in die Gleichung für Φ^* liefert mittels der Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iS'z} z^n = \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[i \frac{\partial}{\partial S'} \right]^n e^{-iS'z}$$

als Entwicklung für die optimale Strategie:

$$\Phi_t^*(S_t) = \frac{1}{c_2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial S^{n-1}} C(S, K, T-t).$$

Im Gausschen Fall gilt für die Kumulanten:

$c_n = 0$ für $n \geq 2$.

$\Rightarrow$ Repro. der Black Scholes Hedgingformel.

Durch Einsetzen der Kumulantenentw. in

$$\langle \Delta W_{trade} \rangle = m \sum_{t=0}^{T-\tau} \int_{t=0}^{\infty} P(S_t, t | S_0, 0) \Phi_t^*(S_t) \neq 0$$

$\Rightarrow$Korrektur der Optionspreisformel in m:

$$C(S_0, K, T; m) = C(S_0, K, T)$$
$$- \frac{m}{c_2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-3}}{\partial S^{n-3}} P_0(S, T | S_0, 0) \Big|_{S=K}$$

mit $P \to P_0$ durch $c_1 \to 0$.

Volatility smile und implied Kurtosis

Im Falle von Marktfluktuationen, die nicht zu stark von einer $F_{LN}^{\mu,\sigma}$-Verteilung abweichen:
Erfassung der fat tails der realen Verteilungen näherungsweise durch die Kurtosis

$$\kappa = \frac{c_4}{c_2^2}$$

d.h. durch Abbruch der Kumulantenentwicklung nach der vierten Ordnung.

$\Rightarrow$ Optionspreisformel = Black-Scholes-Optionspreisformel, mit Volatilität σ $\rightarrow$ Volatilität σ_{impl}:

$$\sigma_{impl}(K,T) = \sigma \left[1 + \frac{\kappa_T}{24} \left(\frac{(K-S_0)^2}{\sigma^2 T} - 1 \right) \right]$$