RT, Lösungshinweise zu Blatt 4

Aufgabe 1

In die Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned} \vec{x}'_{\|} &= \gamma\left(\vec{x}_{\|} - \vec{\beta}ct\right) \\ \vec{x}'_{\perp} &= \vec{x}_{\perp} \\ ct' &= \gamma\left(ct - \vec{\beta}\cdot\vec{x}_{\|}\right) \end{aligned}$$

setze man

$$\vec{x}_{\|} = \vec{x} - \vec{x}_{\perp}$$

ein. Weiter benutze man, daß $\vec{x}_{\perp}\cdot\vec{\beta} = 0$ und daß

$$\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - (\vec{x}\cdot\hat{\beta})\,\hat{\beta}\,.$$

Man erhält

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma x^0 - \gamma\vec{\beta}\cdot\vec{x} \\ \vec{x}' &= \vec{x} + (\gamma-1)(\vec{x}\cdot\hat{\beta})\hat{\beta} - \gamma\vec{\beta}\,x^0\,. \end{aligned}$$

Mit Minkowski-Indizes (griechische Indizes laufen von 1 bis 3):

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma x^0 + \gamma\beta_\mu x^\mu \\ x^{\alpha'} &= x^\alpha - (\gamma-1)(\hat{\beta}_\mu x^\mu)\hat{\beta}^\alpha - \gamma\beta^\alpha\,x^0\,. \end{aligned}$$

Man beachte das Auftreten von Minus-Zeichen! Jetzt braucht man nur noch abzuleiten:

$$L^i{}_k = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$$

Man erhält

$$\begin{aligned} L^0{}_0 &= \gamma \\ L^0{}_\alpha &= \gamma\,\beta_\alpha \quad (= -\gamma\,\beta^\alpha) \\ L^\alpha{}_0 &= -\gamma\,\beta^\alpha \\ L^\mu{}_\nu &= \delta^\mu{}_\nu - (\gamma-1)\hat{\beta}^\mu\hat{\beta}_\nu \quad (= \delta^\mu{}_\nu + (\gamma-1)\,\hat{\beta}^\mu\hat{\beta}^\nu) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Im Falle eines *zeitartigen* Vektors wende man einen Boost mit $\vec{\beta} = \vec{u}/u^0$ an. Mit den Transformationsgleichungen aus Aufgabe 1 sieht man sofort, daß die Raumkomponenten des transformierten Vektors verschwinden. Aus u^2 invariant folgt dann die angegebene Normalform. Das Vorzeichen hängt davon ab, ob u vergangenheits- oder zukunftsgerichtet ist.

Liegt ein *raumartiger* Vektor vor, appliziere man zunächst einen Boost mit $\vec{\beta} = u^0\,\vec{u}/|\vec{u}|^2$. Der transformierte Vektor hat keine 0-Komponente mehr. Eine räumliche Drehung bringt ihn dann auf die angegebene Normalform.

Zeitartige Vektoren bringt man zunächst durch eine geeignete Raum-Drehung auf die Form $(\pm a, a, 0, 0)$. Danach folgt ein Boost in 1-Richtung. Dieser wirkt auf den angegebenen Vektor wie eine Multiplikation mit dem Faktor $\gamma\,(1-\beta)$. Durch geeignete Wahl von β kann man die gewünschte Normalform erreichen.

Aufgabe 3

Man benutze die in Aufgabe 2 studierten Normalformen. Sei zunächst u *lichtartig*. In einem geeignet gewählten IS kann das Skalarprodukt mit einem beliebigen anderen Vierervektor v geschrieben werden als

$$uv = (\pm 1, 1, 0, 0)\,(v^0, v^1, v^2, v^3) = \pm v^0 - v^1.$$

Das Skalarprodukt verschwindet, wenn $\pm v^0 = v^1$. An die weiteren Raumkomponenten ergeben sich keine Einschränkungen. Falls diese identisch Null sind, ist v zwangsläufig lichtartig und proportional zu u. Ist mindestens eine der 2- oder 3-Komponenten ungleich null, so wird v raumartig.

Im Falles eines *zeitartigen* Vektors u kann in seinem Ruhesystem das Skalarprodukt mit einem beliebigen anderen Vektor v in der Form $\pm\sqrt{u^2}v^0$ geschrieben werden. Daher muß v^0 verschwinden. v ist daher raumartig.

Durch eine analoge Überlegung findet man, daß sich für das orthogonale Komplement eines *raumartigen* Vektors keine Einschränkungen ergeben.