RT, Lösungshinweise zu Blatt 2

Aufgabe 1

Wir definieren

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_B - t_A\,, \\ \Delta x &= x_B - x_A\,. \end{aligned}$$

Die Differenz $\Delta t_R = t_{R,B} - t_{R,A}$ kann man aus

$$\begin{aligned} t_{R,A} &= t_A + (x_R - x_A)/c \\ t_{R,B} &= t_B + (x_R - x_B)/c \end{aligned}$$

gewinnen:

$$\Delta t_R = \Delta t - \Delta x/c\,.$$

Analog finden wir

$$\Delta t_L = \Delta t + \Delta x/c\,.$$

Durch Multiplikation und Wurzelziehen finden wir

$$\sqrt{\Delta t_R \Delta t_L} = \Delta t/\gamma\,. \tag{1}$$

Im Ruhesystem S' von M bewegen sich L und R mit Geschwindigkeit $-v$. Für die Transformation der Zeiten gilt daher

$$ct = \gamma\left(ct' + \frac{v}{c}x'\right)\,.$$

Dabei sind (x', t') die Koordinaten im Ruhesystem von M. Dieser sitzt mit seiner Uhr bei $x' = 0$. Daher

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \Delta\tau\,.$$

Vergleich mit Gl. (1) liefert

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t_R \Delta t_L}\,.$$

Aufgabe 2

Das Inverse einer 2×2-Matrix ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{AD - BC}\begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}\,.$$

Die Lorentz-Transformation läßt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} .$$

Der Rest ist nun ein Kinderspiel.

Aufgabe 3

Die Komposition von zwei LT ergibt

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\beta_1 & 1 \end{pmatrix} \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & 1 \end{pmatrix} = \gamma_1\gamma_2 \begin{pmatrix} 1+\beta_1\beta 2 & -\beta_1-\beta_2 \\ -\beta_1-\beta_2 & 1+\beta_1\beta_2 \end{pmatrix} .$$

Dies soll wieder eine LT der Form

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

sein. Wir identifizieren also

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) \\ \beta &= \tfrac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} . \end{aligned}$$

Müssen noch zeigen, daß diese beiden Parameter die Beziehung

$$1-\beta^2 = 1/\gamma^2$$

erfüllen. Dies ist eine einfache Rechnung. Wir bemerken, daß wir $\beta = \tanh(\psi)$ schreiben können, mit $-\infty < \psi < \infty$. Die Größe ψ heißt *Rapidität.* Mithilfe des Additionstheorems

$$\frac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)} = \tanh(x+y) ,$$

das sich in jeder guten Formelsammlung findet, bekommt das SRT-Additionstheorem für Geschwindigkeiten die Form

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 .$$

Offensichtlich ist $\beta = \tanh(\psi_1+\psi_2)$ wieder eine Zahl aus dem Intervall $(-1,1)$.