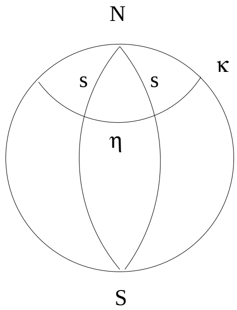
RT, Lösungshinweise zu Blatt 1

Aufgabe 1

Wähle Kugelkoordinaten (θ, ϕ) so, daß P am Nordpol liegt. Die Geodäten sind dann die Großkreise durch Nord- und Südpol, $\phi = const$, $0 \leq \theta \leq \pi$.



Es gilt

$$s = \frac{\theta}{\pi} \frac{2\pi a}{2} = \theta\, a\,. \tag{1}$$

Die Geodäten haben Azimut ϕ_1 und ϕ_2. Sei $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$. Dann

$$\eta = \Delta\phi\, a\, \sin\theta\,. \tag{2}$$

Dabei ist $a \sin\theta$ der Radius des Kreises κ. Mithilfe von Gl. (**??**) können wir schreiben

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} = \frac{1}{a^2} \frac{d^2\eta}{d\theta^2}\,.$$

Gl. (**??**) liefert dann sofort

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} = -\frac{\eta}{a^2}\,.$$

Daher $K = 1/a^2$.

Aufgabe 2

Wir können die Illustration zu Aufgabe 1 benutzen (s ist der Radius des Kreises, geodätisch gemessen). Der Kreis κ hat einen Umfang

$$\begin{aligned} C &= 2\pi\, a\, \sin(s/a) \\ &= 2\pi\, a \left(\tfrac{s}{a} - \tfrac{1}{6} \left(\tfrac{s}{a}\right)^3 + \ldots \right) \\ &= 2\pi s - \tfrac{2\pi}{6} \tfrac{s^3}{a^2} + \ldots \end{aligned}$$

Es ist jetzt leicht nachzurechnen, daß das Resultat für K das gleiche ist wie in Aufgabe 1.