9 Physikalische Grundlagen der ART

9.1 Beschleunigte Bezugssystem in der SRT

$x^i(\lambda)$ Weltlinie, λ beliebiger Parameter

invariantes Eigenzeitintervall:

$$ds^2 = \eta_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

$$ds = \sqrt{\eta_{ik}\, \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda}}\, d\lambda$$

Transformation auf ein beschleunigtes Bezugssystem ist ein Spezialfall des Übergangs zu krummlinigen Koordinaten.

Beispiel:

$$t = \tilde{t}, \quad x = \tilde{x} + \frac{g}{2} t^2, \quad y = \tilde{y}, \quad z = \tilde{z}$$

Linienelement in den neuen Koordinaten:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{ik}\, dx^i\, dx^k = d\tilde{t}^2(1 - g^2\tilde{t}^2) - 2g\, \tilde{t}\, d\tilde{x}\, d\tilde{t} - d\tilde{x}^2 - d\tilde{y}^2 - d\tilde{z}^2 \\ &= g_{ik}\, dx^{\tilde{i}}\, dx^{\tilde{k}} \end{aligned}$$

Metrischer Tensor mit Komponenten $g_{\tilde{i}\tilde{k}}$

$$g_{\tilde{0}\tilde{0}} = 1 - g^2\tilde{t}^2, \quad g_{\tilde{0}\tilde{1}} = g_{\tilde{1}\tilde{0}} = g\tilde{t}, \quad g_{\tilde{1}\tilde{1}} = g_{\tilde{2}\tilde{2}} = g_{\tilde{3}\tilde{3}} = -1$$

Beschleunigte Bezugssysteme sind in der SRT zulässig, das Linienelement hat aber die allgemeinere Form

$$ds^2 = g_{\tilde{i}\tilde{k}}\, dx^{\tilde{i}}\, dx^{\tilde{k}}$$

Wegen

$$ds^2 = \eta_{ik}\, dx^i\, dx^k = \eta_{ik}\, \frac{\partial x^i}{\partial x^{\tilde{l}}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{\tilde{m}}} dx^{\tilde{l}}\, dx^{\tilde{m}} = g_{\tilde{l}\tilde{m}}\, dx^{\tilde{l}}\, dx^{\tilde{m}}$$

gilt

$$g_{\tilde{l}\tilde{m}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{\tilde{l}}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{\tilde{m}}}\, \eta_{ik}$$

Linienelement invariant bei $x \to \tilde{x}$. Abstände $S = \int ds$ hängen nur vom Integrationsweg ab, nicht aber von den verwendeten Koordinaten.

9.2 Das Äquivalenzprinzip

Schwere und trägen Masse sind mit sehr großer Genauigkeit einander proportional. Daher fallen alle Körper im Schwerefeld gleich schnell.

Einsteinsches Äquivalenzprinzip: Die Wirkung von Schwerefeldern ist (lokal) äquivalent einer Beschleunigung des Bezugssystems.

Beispiel: In einem frei um die Erde kreisendes Satellitenlabor kann die Inhomogenität des Gravitationsfeldes vernachlässigt werden. Jedes Experiment im Satelliten verläuft so, als sei das Schwerefeld der Erde nicht vorhanden. Ein auf der Erde ruhendes Labor ist relativ zu diesem IS beschleunigt. Durch die Beschleunigung treten Scheinkräfte auf (Gravitation).

Grundidee für den mathematischen Formalismus der ART:
Das Linienelement hat die Form wie in der SRT für beschleunigte Bezugssysteme angegeben:

$$ds^2 = g_{ik}(x)\, dx^i\, dx^k$$

Die g_{ik} beschreiben das Gravitationsfeld. Die g_{ik} sind aber nicht eindeutig durch das Gravitationsfeld bestimmt, da stets Koordinatentransformationen $x^i = f^i(x^{\bar{k}})$ möglich sind, die die Form der Metrik ändern. Es ist stets möglich, g_{ik} *lokal* auf die Gestalt η_{ik} zu bringen, nicht aber *global*, es sei denn, das Gravitationsfeld verschwindet.

Raum mit obigem Linienelement: *Riemannscher Raum.*

Gravitationsfeld durch die 10 Komponenten des metrischen Tensors bestimmt.

Aufgabe: Bestimme die Feldgleichungen für den metrischen Tensor und untersuche die Bewegung von Teilchen in dem Raum mit dieser Metrik.

9.3 Bewegung im Gravitationsfeld

Weltlinien von Teilchen sind Geodäten:

$$\int ds = \text{Extremum} \quad \text{bzw.} \quad \delta \int ds = 0$$

Mit

$$ds = \sqrt{g_{ik}(x)\, \dot{x}^i\, \dot{x}^k}\, d\lambda, \qquad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$$

ist die Geodätenbedingung

$$\delta \int d\lambda \sqrt{g_{ik}(x)\, \dot{x}^i\, \dot{x}^k} \; = \int d\lambda \mathcal{L} = 0$$

Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}$$

Einsetzen von $\mathcal{L}$:

$$\frac{1}{\mathcal{L}}\, \dot{x}^l\, \dot{x}^k g_{ik,l} - \frac{1}{\mathcal{L}^2}\, g_{ik}\, \dot{x}^k \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} + \frac{1}{\mathcal{L}}\, \dot{x}^k\, g_{ik} = \frac{1}{2\mathcal{L}}\, g_{kl,i}\, \dot{x}^k\, \dot{x}^l$$

Mit den *Christoffel-Symbolen 1. Art:*

$$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2}(g_{ik,l} + g_{li,i} - g_{kl,i})$$

kann man dies schreiben als

$$g_{ik}\,\ddot{x}^k + \Gamma_{ikl}\,\dot{x}^k\dot{x}^l - \frac{1}{\mathcal{L}}\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda}\,g_{ik}\dot{x}^k = 0$$

Für $ds \neq 0$ wähle $\lambda = s = \int d\lambda\,\mathcal{L}$ (Eigenzeit). Dann $d\mathcal{L}/d\lambda = 0$, und

$$g_{ik}\,\ddot{x}^k + \Gamma_{ikl}\,\dot{x}^k\,\dot{x}^l = 0 \qquad (BG1)$$

Kovariante Komponenten des metrischen Tensors definiert durch

$$g_{ik}\,g^{kl} = \delta^l_i$$

Multipliziere $(BG1)$ mit g^{im} (Summationskonvention)

$$\ddot{x}^m + \Gamma^m{}_{kl}\,\dot{x}^k\,\dot{x}^l = 0$$

Christoffel-Symbole 2. Art:

$$\Gamma^m{}_{kl} = g^{im}\,\Gamma_{ikl} \qquad (BG2)$$

$(BG2)$ ist die Bewegungsgleichung eines Körpers im Gravitationsfeld g_{ik} (Geodätengleichung).

Es gibt raumartige, zeitartige und lichtartige Geodäten. Letztere nennt man *Nullgeodäten.* Auf diesen breiten sich Lichtstrahlen aus.

Bemerkung: Obige Herleitung ist nicht auf Nullgeodäten anwendbar, da für diese die Division durch $\mathcal{L}$ nicht möglich ist. Man erhält aber dieselbe Bewegungsgleichung, wenn man von

$$\delta \int d\lambda \, g_{ik}(x) \, \dot{x}^i \, \dot{x}^k$$

ausgeht.

9.4 Die Newtonsche Näherung

Im schwachen Gravitationsfeld (z.B. im Sonnensystem) ist die Geometrie in guter Näherung euklidisch, d.h. in einem geeignet gewählten KS ist die Abweichung der Metrik von η_{ik} klein:

$$g_{ik}(x) = \eta_{ik} + 2 \, \psi_{ik}(x) \, ,$$

mit $|\psi_{ik}(x) \ll 1|$.

Planetenbewegung langsam, daher Vierergeschwindigkeit

$$\dot{x}^k \approx (1, \vec{0})$$

Außerdem $ds \approx dt$.

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i{}_{00} = 0$$

Räumlicher Anteil:

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{00} = 0$$

Da Γ_{i00} von der Ordnung ψ ist,

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha{}_{00} &= g^{\alpha i}\Gamma_{i00} \approx \eta^{\alpha i}\Gamma_{i00} \\ &= \tfrac{1}{2}\eta^{\alpha i}\left(2g_{0i,0} - g_{00,i}\right) \end{aligned}$$

Da das Gravitationsfeld der Sonne fast statisch ist, kann man die Zeitableitung vernachlässigen:

$$\Gamma^\alpha{}_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha i} g_{00,i}$$

Damit

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha i} g_{00,i} = \eta^{\alpha i}\psi_{00,i}$$

Das kann man schreiben als

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\mathrm{grad} U$$

$U \equiv \psi_{00}$ ist das übliche Gravitationspotential. Für die Metrik in Newtonscher Näherung folgt

$$ds^2 = (1 + 2\,U)\, dt^2 - d\vec{x}^2$$

Kugelsymmetrische Massenverteilung: $U = -G\,M/r$

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2\,G\,M}{r\,c^2}\right) dt^2 - d\vec{x}^2$$

Schwarzschild-Radius:

$$R_S = \frac{2\,G\,M}{c^2}$$

Für die Sonne ist $R_S \approx 3$ km. Der Sonnenradius ist 700.000 km. Abweichungen von der Minkowski-Geometrie am Sonnenrand daher kleiner 10^{-5}.

Bemerkung: Obige Näherung gilt für schwache Felder und langsame Bewegungen. Für schnelle Bewegungen, z.B. von Licht, müssen Korrekturen zum Raumteil der Metrik berücksichtigt werden.