8 Klassische Elektrodynamik

In einer relativistisch invarianten Theorie gibt es keine instantane Fernwirkung. Wechselwirkung wird durch Felder vermittelt, die Energie und Impuls übertragen und selbständige physikalische Entitäten sind. Der Prototyp für eine solche Theorie ist die Elektrodynamik.

Lorentzkovarianz der Theorie: Gleichungen lassen sich als Gleichungen zwischen *Tensor*größen im Minkowski-Raum formulieren.

8.1 Tensoren

<u>Definition:</u> Die kontravarianten (kovarianten) Komponenten eines Tensors der Stufe r werden so transformiert wie das direkte Produkt (Tensorprodukt) von r kontravarianten (kovarianten) Vektorkomponenten, i.e.

$$T^{k_1 k_2 \ldots k_r} \quad \text{transformiert wie} \quad A^{k_1} B^{k_2} \ldots Z^{k_r}$$

Ausgeschrieben:

$$T^{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \ldots \bar{k}_r} = \frac{\partial x^{\bar{k}_1}}{\partial x^{m_1}} \frac{\partial x^{\bar{k}_2}}{\partial x^{m_2}} \cdots \frac{\partial x^{\bar{k}_r}}{\partial x^{m_r}} T^{m_1 m_2 \ldots m_r}$$

Lorentztransformationen:

$$\frac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^k} = L^i{}_k$$

ART: Koordinaten-Transformationen werden x-abhängig. Obige Tensordefinition bleibt dieselbe.

Tensoren vom Typ (p, q) haben p kontravariante und q kovariante Indizes. Beispiel: $r = p + q = 2$,

$$\begin{aligned}
T^{\bar{i}\bar{k}} &= \tfrac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^l} \tfrac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^m} T^{lm} && \text{kontravarianter Tensor} \\
T^{\bar{i}}{}_{\bar{k}} &= \tfrac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^l} \tfrac{\partial x^m}{\partial x^{\bar{k}}} T^l{}_m && \text{gemischter Tensor} \\
T_{\bar{i}\bar{k}} &= \tfrac{\partial x^l}{\partial x^{\bar{i}}} \tfrac{\partial x^m}{\partial x^{\bar{k}}} T_{lm} && \text{kovarianter Tensor}
\end{aligned}$$

Wichtige Eigenschaft von Tensoren: Zwei Tensoren sind genau dann gleich, wenn in irgendeinem Koordinatensystem alle ihre Komponenten übereinstimmen. Sie stimmen dann in *allen* Koordinatensystemen überein.

8.2 Elementare Tensor-Algebra

Die *Summe* zweier Tensoren ist wieder ein Tensor:

$$A_l^{ik} + B_l^{ik} = C_l^{ik}$$

Multiplikation mit einem *Skalar* erzeugt wieder einen Tensor vom gleichen Typ:

$$\lambda T_{ik} = B_{ik}$$

Das *direkte Produkt* zweier Tensoren ergibt einen Tensor der entsprechend höheren (i.a. gemischten) Stufe:

$$A_l{}^{ik} B^{mn} = G_l{}^{ikmn}$$

Durch *Kontraktion* (Verjüngung) erhält man Tensoren niedrigerer Stufe:

$$C^i = A^{ik} B_k$$

Beweis der Tensoreigenschaft von C:

$$\begin{aligned} C^{\bar{i}} &= A^{\bar{i}\bar{k}} B_{\bar{k}} \\ &= L^{\bar{i}}{}_l\, L^{\bar{k}}{}_m A^{lm} L_{\bar{k}}{}^n B_n \end{aligned}$$

Wegen

$$L^{\bar{k}}{}_m L_{\bar{k}}{}^n = \frac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x^{\bar{k}}} = \delta^n_m$$

gilt

$$C^{\bar{i}} = L^{i}{}_{l}\, A^{lm}\, B_m = L^{i}{}_{l}\, C^{l}$$

q.e.d.

Wichtige Beispiele für die Verjüngung:

Skalarprodukt zweier Vierervektoren (Lorentzinvariante):

$$S = A^i\, B_i$$

Verjüngung eines Tensors zweiter Stufe auf einen Skalar:

$$S = T^{i}_{\;i}$$

Viererdivergenz:

$$S = \partial_i\, A^i = \frac{\partial}{\partial x^i}\, A^i$$

Das *Quotiententheorem* wird an einem Beispiel erläutert:

A_{ik} Größe mit n^2 Komponenten, so daß $A_{ik}\, x^k$ einen kovarianten Vektor darstellt. Dann muß A_{ik} ein kovarianter Tensor 2. Stufe sein.

Allgemein: Wenn das Produkt $A\,B = C$ einen Tensor C ergibt, wobei B ein beliebiger Tensor ist, dann ist A ein Tensor.

8.3 Relative Tensoren

Im Transformationsgesetz tritt zusätzlich die Funktionaldeterminante in einer bestimmten Potenz auf.

Relativer Tensor vom Gewicht w:

$$R^{\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_r}_{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s} = \frac{\partial x^{\bar{k}_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{\bar{k}_r}}{\partial x^{l_r}} \frac{\partial x^{n_1}}{\partial x^{\bar{m}_1}} \cdots \frac{\partial x^{n_s}}{\partial x^{\bar{m}_s}} R^{l_1 \ldots l_r}_{n_1 \ldots n_s} \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^w .$$

Direktes Produkt von Tensoren: Gewichte addieren sich.

Beispiel: Volumenelement

$$d^n \bar{x} = d^n\, x \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right| .$$

ist *relativer Skalar* vom Gewicht -1.

Ein relativer Tensor vom Gewicht $+1$ heißt *Tensordichte.*

Volumenenlement $\times$ Tensordichte $\rightsquigarrow$ (absoluter) Skalar

$$S = \int d^n x\, A(x)$$

Levi-Civita-Symbol:

$$\epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{für Indizes in gerader Permutation von } 1,2,\ldots,\, n \\ -1 & \text{für Indizes in ungerader Permutation von } 1,2,\ldots,\, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Levi-Civita-Symbol ist eine *Tensordichte*.

8.4 Ladung im äußeren Feld

Wirkungsintegral für eine Ladungsverteilung im (vorgegebenen) äußeren Feld:

$$S = -mc \int ds - \frac{1}{c} \int dt\, d^3x\, j \cdot A$$

Zur Herleitung: Lagrange-Funktion hat Dimension einer Energie. Statische Energiedichte $\rho\phi$. Ergänze ρ und ϕ zu Vierervektoren

$$j^i = (c\rho, \vec{j})$$

$$A^i = (\phi, \vec{A})$$

und bilde das lorentzinvariante Skalarprodukt.

$L = T - U$ für kleine Geschwindigkeiten $\rightarrow$ Vorzeichen!

Punktladung mit Ladung e:

$$j^i = e(c, \vec{v})\, \delta^{(3)}\left(\vec{x} - \vec{x}(t)\right)$$

Damit

$$S = \int \left(mc\, ds + \frac{e}{c} A_i\, dx^i \right) = \int dt\, L$$

mit

$$L = -m\, c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \vec{A}\vec{v} - e\phi$$

Verallgemeinerter Impuls:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}.$$

Hamilton-Funktion:

$$H = e\phi + c\sqrt{\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + m^2\ c^2}$$

Der Übergang vom freien Teilchen zu Teilchen im äußeren Feld geschieht durch die minimale eichinvariante Substitution

$$p^i \to p^i - \frac{e}{c} A^i\, .$$

8.5 Bewegungsgleichungen von Teilchen im äußeren Feld

$$S = -\int d\lambda \left(mc\sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}} + \frac{e}{c}A_i(x)\,\frac{dx^i}{d\lambda} \right)$$

Euler-Lagrange-Gleichungen, $\lambda \to s$:

$$m\frac{du_i}{ds} + \frac{e}{c}\frac{dA_i}{ds} - \frac{e}{c}\frac{dx^k}{ds}\,\frac{\partial A_k}{\partial x^i} = 0$$

Mit

$$\frac{dA_i}{ds} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{ds}$$

ergibt sich

$$m\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \right)\, u^k$$

bzw.

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}\,u^k\,.$$

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \equiv A_{k,i} - A_{i,k}$$

Abkürzung für partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}T^{\cdots}_{\cdots} = \partial_i T^{\cdots}_{\cdots} = T^{\cdots}_{\cdots,i}$$

F_{ik} *Feldstärketensor* des elektromagnetischen Feldes, antisymmetrisch $\rightsquigarrow$ 6 unabhängige Komponenten:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Beziehungen:

Lorentz-Kraft:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\,\vec{E} + \frac{e}{c}\,\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$$

Ohmsches Gesetz:

$$\frac{dE_{\mathrm{kin}}}{dt} = e\vec{E} \cdot \vec{v}$$

<u>Invarianten der Feldstärke</u>

$$\begin{aligned} I_1 &= \vec{B}^2 - \vec{E}^2 &&= \tfrac{1}{2}\,F_{ik}\,F^{ik} \\ I_2 &= -(\vec{E} \cdot \vec{B}) &&= \tfrac{1}{8}\,\epsilon^{ijkl}\,F_{ij}\,F_{kl} \end{aligned}$$

Definition des zu F^{ij} *dualen* Tensors:

$$\tilde{F}^{ij} = \epsilon^{ijkl}\, F_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Regel: Ersetze $\vec{E} \to \vec{B}$ und $\vec{B} \to -\vec{E}$!

$$I_2 = \frac{1}{4} F_{ij} \tilde{F}^{ij}$$

Alle anderen Invarianten lassen sich durch I_1 und I_2 ausdrücken!

8.6 Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form

Aus der Definition

$$F_{ij} = A_{j,i} - A_{i,j}$$

folgt

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0$$

Wegen Antisymmetrie *trivial* erfüllt falls 2 oder 3 der Indizes gleich. Die nichttrivialen vier Gleichungen ergeben die *homogenen* Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{B} &= 0 \\ \mathrm{rot}\vec{E} + \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

In kompakter Form:

$$\partial_i \tilde{F}^{ij} = 0 \,.$$

Die *inhomogenen* Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{E} &= 4\pi\,\rho \\ \mathrm{rot}\vec{B} - \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \tfrac{4\pi}{c}\,\vec{j} \end{aligned}$$

lassen sich schreiben als

$$\partial_i F^{ij} = \frac{4\pi}{c}\, j^j \,.$$

8.7 Wirkungsintegral für das Feld und Feldgleichungen

$$S = S_F + S_M + S_W$$

Forderungen:

- Invarianz gegen Lorentztransformationen
- Eichinvarianz: L Funktion der Feldstärken und nicht der Potentiale

- L muß quadratisch sein in den Feldkomponenten $\rightsquigarrow$ lineare Feldgleichungen $\rightsquigarrow$ Superpositionsprinzip der ED

$$S = \frac{1}{16\pi c} \int d^4x \, F_{ij} \, F^{ij} - \sum_i m_i c \int ds_i - \frac{1}{c^2} \int d^4x j \cdot A$$

S_M hängt nur von den Teilchenkoordinaten ab. Feldgleichungen folgen aus

$$\delta S = \delta \left(S_F + S_W \right) = 0$$

<u>Variation in Analogie zur Mechanik</u>:

generalisierte Koordinaten	$q_i(t)$	$\phi(\vec{x}, t)$
unabhängige Variablen	i, t	$\vec{x}, t$
Lagrangefunktion	$L(q_i, \dot{q}_i)$	$\mathcal{L}(\phi, \partial_i \phi)$
Wirkungsintegral	$\int dt \, L$	$\int dt \, \int d^3x \, \mathcal{L}$
EL-Gleichungen	$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$	$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \phi}$

Die EL-Gleichungen ergeben die inhomogenen Maxwell-Gleichungen!

8.8 Erhaltungssätze, Noether-Theorem

Auch in der ED: In einem abgeschlossenem System gelten die Sätze von der Erhaltung der Energie, des Impulses und des Drehimpulses. Diese folgen aus der Invarianz der Theorie unter zeitlichen und räumlichen Translationen und den homogenen LT.

Mathematisches Hilfsmittel um den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen zu finden: *Noether-Theorem.*

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\psi, \partial_i \psi, x^i)$$

Symmetrie-Transformation:

$$\begin{aligned} x^i &\to x^i + \delta x^i \\ \psi(x) &\to \psi(x) + \delta\psi(x) \\ \partial_i\psi(x) &\to \partial_i\psi(x) + \delta\partial_i\psi(x) \end{aligned}$$

Invarianz der Wirkung:

$$\partial_i g^i = 0$$

mit

$$g^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,i}} \delta\psi - \theta^{ij} \delta x_j$$

und

$$\theta^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,i}} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \mathcal{L}\, g^{ij}$$

Kontinuitätsgleichung für den Vierervektor g^i. Integration über die räumlichen Komponenten:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int d^3x g^0 = -\int_S d\vec{S} \cdot \vec{g}$$

Oberflächenterm verschwindet bei hinreichend gutem Abklingverhalten, wenn man die Flächen nach "unendlich" schiebt.

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int d^3x g^0 = 0$$

Allgemeine Formulierung des Noether-Theorems:
Wenn das mit der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ gebildete Wirkungsintegral S invariant ist gegenüber einer kontinuierlichen Transformationsgruppe G_n, deren Elemente analytisch von n (unabhängigen) Parametern abhängen, dann folgen bei Gültigkeit der Feldgleichungen die n Erhaltungssätze

$$\begin{aligned}\partial \cdot g_a &= 0, \quad a = 1, 2, \ldots, n \\ g_a^i &= \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,i}} \delta_a \psi - \theta^{ij} \delta_a x_j\end{aligned}$$

Bemerkung: Invarianz im obigen Sinne ist immer Invarianz bis auf das Auftreten einer additiven Divergenz in der Lagrange-Funktion, die die Bewegungs-Gleichungen nicht ändert:

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial \cdot \Omega$$

Veranschaulichung des Noether-Theorems am Beispiel der *Translations-Symmetrie:*

$$x^i \to x^i + \delta\epsilon^i$$

mit konstanten (x-unabhängigen) Verschiebungen $\delta\epsilon^i$.

Wegen $\delta\psi = 0$ gilt

$$\partial_i \theta^{ij} \delta\epsilon_j = 0.$$

ϵ beliebig $\rightsquigarrow$

$$\partial_i \theta^{ij} = 0$$

Das Integral

$$P^i = \frac{1}{c}\int d^3x\theta^{0i}$$

ist zeitlich konstant.

P^i ist der *Energie-Impuls-Vektor* des Feldes.

Insbesonders:

$$P^0 = \frac{1}{c}\int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \mathcal{L}\right)$$

Der Integrand ist die Hamilton- (Energie-) Dichte $\mathcal{H} = \theta^{00}$.

θ^{ij} heißt *kanonischer Energie-Impuls-Tensor.*
Explizite Form für das freie elektromagnetische Feld mit Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij}$$

ist

$$\theta^{ij} = -\frac{1}{4\pi}F^{il}\partial^j A_l - \eta^{ij}\mathcal{L}_F$$

Der so bestimmte kanonische Energie-Impulstensor hat einige Nachteile (fehlende Eichinvarianz und Symmetrie). Diese Nachteile verschwinden, wenn die Invarianz gegenüber homogenen LT berücksichtigt wird.