7 Relativistische Mechanik

Kinematische und dynamische Grundgesetze müssen dem Relativitätsprinzip genügen: Alle IS gleichberechtigt $\rightsquigarrow$ Naturgesetze müssen *lorentzkovariant* (formuliert) sein.

7.1 Kinematik

Trajektorie (Bahn) eines Teilchens in bezug auf ein IS I:

$$\vec{x} = \vec{x}(t)$$

Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

hat kompliziertes Transformationsverhalten unter LT

$$x^{\bar{i}} = L^{\bar{i}}{}_k \, x^k \, .$$

Vierergeschwindigkeit:

Parametrisiere Weltlinie durch (lorentzinvariante) Eigenzeit s:

$$x^i = x^i(s) \, .$$

Tangente an die Weltlinie:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}$$

u Vierervektor, da dx Prototyp eines Vierervektors, ds invariant.

Wegen
$$ds = dt\,\sqrt{1 - v(t)^2}$$
gilt
$$\frac{d}{ds} = \gamma\,\frac{d}{dt}\,.$$
Daher
$$u^i = \left(\frac{dt}{ds}, \frac{d\vec{x}}{ds}\right) = \gamma\ (1, \vec{v})\ .$$

Nichtrelativistischer Grenzfall (NR):
$$u^i \approx (1, \vec{v})$$

Viererquadrat von u:
$$u^2 = u^i\,u_i = \frac{dx^i dx_i}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1$$

Vierergeschwindigkeit *zeitartig*.

Definition des *Viererimpulses*:

$$p^i = m\,u^i\,, \quad p^i = \left(p^0, \vec{p}\right)$$

NR gilt

$$(p^i) \approx (m, m\vec{v})$$

Viererquadrat:

$$p^2 = \left(p^0\right)^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

Viererimpulse sind zeitartig und bilden ein Hyperboloid, die *Massenschale.*

Definition der *Viererbeschleunigung:*

$$b^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2}$$

Differentiation von $u^2 = 1$ nach s:

$$0 = \frac{d}{ds}\left(\eta_{ik}\,u^i\,u^k\right) = \eta_{ik}\,\left(u^i b^k + b^i u^k\right) = 2u^i\,b_i = 2u\,b$$

b orthogonal zu u und daher raumartig, vergl. Übungen.

Verallgemeinerung der Newton-Gleichung $\vec{F} = m\,\vec{a} = (d/dt)\,\vec{p}$ durch Definition der *Viererkraft*:

$$K^i = m\,b^i = m\,\frac{du^i}{ds} = \frac{dp^i}{ds}$$

Wenn die explizite Form von K gegeben ist (aus Theorie, z.B. Elektrodynamik), kann durch Integration der Bewegungsgleichung die Teilchenbewegung bestimmt werden.

K ein Vierervektor, dann Bewegungsgleichung automatisch lorentzkovariant.

Allgemein: Läßt sich ein Naturgesetz als Gleichung zwischen Vierervektoren schreiben, so genügt es automatisch dem Relativitätsprinzip.

<u>Zur Interpretation von p^0:</u>
Im momentanen Ruhesystem $\bar{I}$

$$\begin{aligned} u^{\bar{i}} &= (1, \vec{0}) \\ K^{\bar{i}} &= (0, \vec{k}) \end{aligned}$$

Letztere Gleichung wegen $ds = dx^{\bar{0}}$ im momentanen Ruhsystem und

$$K^{\bar{0}} = \frac{\partial^2 x^{\bar{0}}}{\partial s^2}$$

$\vec{k}$ übliche, im Ruhesystem wirkende Kraft.
LT auf das System I:

$$K^i = \left(\gamma \vec{v}\vec{k}, \vec{k} + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\vec{v}\vec{k})\vec{v} \right) .$$

K^0 hat die Bedeutung der am Teilchen von Kraft $\vec{k}$ pro (Eigen-) Zeiteinheit geleistete Arbeit:

$$K^0 = \gamma\, \vec{k}\vec{v} = \gamma\, \vec{k}\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{k}\, \frac{d\vec{x}}{ds}$$

Wegen

$$K^0 = \frac{dp^0}{ds}$$

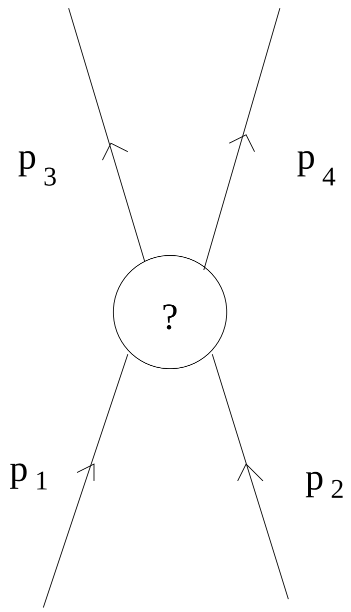
folgt $dp^0 = \vec{k}\, d\vec{x}$. K^0 erhält damit die Bedeutung der Energie des Teilchens.

$$p^0 = \gamma\, m = m + \frac{mv^2}{2} + \, ...$$

m ist die *Ruhenergie* des Teilchens ($m\, c^2$ in konventionellen Einheiten), der Rest ist kinetische Energie T.

$$p^0 = m + T\,.$$

7.2 Streuung. Relativistische Massenzunahme



“Phasenraum” der ein- und auslaufenden Teilchen wird im nicht-relativistischen Grenzfall (NR) durch die Erhaltungssätze für die Impulse

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$$

und für die kinetische Energie

$$\frac{\vec{p_1}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p_2}^2}{2m_2} = \frac{\vec{p_3}^2}{2m_3} + \frac{\vec{p_4}^2}{2m_4}$$

eingeschränkt $\rightsquigarrow$ Elimination von 4 der 6 Freiheitsgrade.

Relativistische Verallgemeinerung: Erhaltung des (Gesamt-) Viererimpulses:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

Für $|\vec{v}| \ll 1$ gilt $p^i \approx (m, m\vec{v})$:

$$m_1 + m_2 = m_3 + m_4\,,$$

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_3\vec{v_3} + m_4\vec{v_4}\,.$$

Nichtrelativistische Massenerhaltung kommt automatisch heraus.

Erhaltung der Null-Komponente des Viererimpulses:

$$m_1 + T_1 + m_2 + T_2 = m_3 + T_3 + m_4 + T_4\,.$$

Nur die *Summe* von Ruhemasse und kinetischer Energie ist erhalten. Es kann daher Prozesse geben, bei denen eine Energieform in die andere umgewandelt wird.

Relativistischer Massenzuwachs:
Wegen $\vec{p} = \gamma\, m\, \vec{v}$ verhält sich ein Teilchen im Stoß so, als hätte es die Masse γm.
Ebenso nimmt die Gesamtenergie eines Teilchens $p^0 = \gamma m$ für $|\vec{v}| \to 1$ unbegrenzt zu $\leadsto$ Lichtgeschwindigkeit nicht erreichbar.
Aus $p^2 = m^2$ folgt

$$p^0 = +\sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}}$$

7.3 Lichtquanten: Dopplereffekt

Photonen sind *masselose* Teilchen:

$$p^2 = m^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad p^i = (|\vec{p}|, \vec{p})$$

Quantenmechanik:

$$p = \hbar\, k\,, \quad k^i = (\omega, \vec{k})$$

k Wellenzahl-Vierervektor
ω Kreisfrequenz des Lichts
Richtung von $\vec{k}$ = Ausbreitungsrichtung
$|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$

Die Phase $wt - \vec{k}\vec{x} = kx$ ist lorentzinvariant.

Relativistischer Dopplereffekt
Ein Photon habe in $\bar{I}$ den Wellenzahl-Vektor

$$k^{\bar{i}} = \bar{\omega}(1, \cos\bar{\theta}, \sin\bar{\theta}, 0)$$

System I bewege sich gegen $\bar{I}$ mit Geschwindigkeit v in $\bar{x}$-Richtung. Dann

$$k^i = \omega(1, \cos\theta, \sin\theta, 0)$$

mit

$$k = \omega \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{\omega} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\bar{\theta} \\ \sin\bar{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1+v\cos\bar{\theta}}\,\bar{\omega}$$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \tfrac{\cos\bar{\theta}-v}{1-v\,\cos\theta} \\ \sin\theta &= \tfrac{\sqrt{1-v^2}\sin\bar{\theta}}{1-v\,\cos\theta} \end{aligned}$$

Spezialfall $\theta = \bar{\theta} = 0$:

$$\omega = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\,.$$

Transversaler Dopplereffekt, $\theta = \pi/2$:

$$\omega = \bar{\omega}\sqrt{1 - v^2}$$

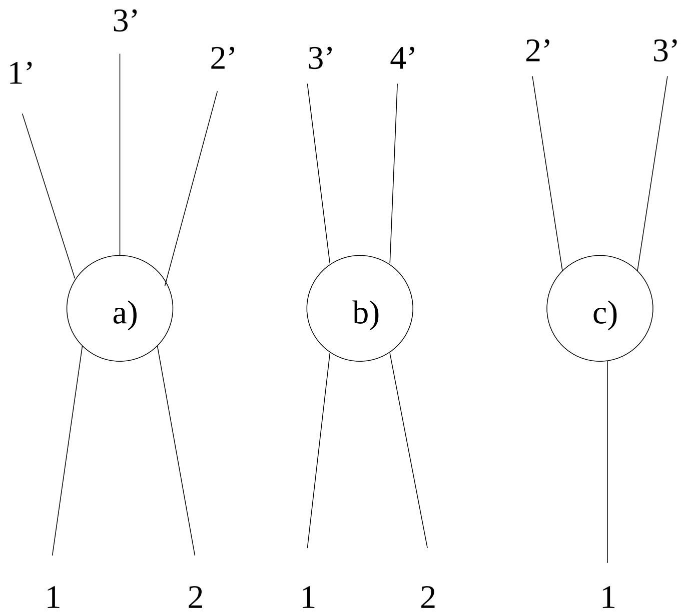
Beobachter bewegt sich senkrecht zum einfallenden Licht. Klassisch kein Effekt zu erwarten. Relativistischer Effekt eine Folge der *Zeitdilatation*. Messung dieses Effekts erstmals durch Ives und Stilwell 1938.

7.4 Umwandlung von Masse in Energie. Massendefekt

Bei Wechselwirkung von Teilchen bleibt nur die Summe aus Ruhenergie und kinetischer Energie erhalten:

$$m\,c^2 + T = \text{ const}$$

Wenn nicht durch andere Erhaltungssätze eingeschränkt, kann bei Stoßprozessen Masse in Energie umgewandelt werden und umgekehrt.



a) Erzeugungsprozeß, z.B. p+p $\rightarrow$ p + p + π^0 oder p+p $\rightarrow$ p + n + π^+. Kinetische Energie des einfallenden Protons liefert die nötige Ruhenergie des Pions.

b) Paarvernichtung, z.B. e^++e^- $\rightarrow$ 2γ, wurde 1932 in einer ersten Präzisionsmessung zur Überprüfung der Erhaltung des Vierer-Impulses benutzt. Ruhmasse wird vollständig in Energie (hier elektromagnetische Strahlung) umgewandelt.

c) Zerfall π^0 $\rightarrow$ 2γ. Erlaubt z.B. den Test des Additionstheorems für Geschwindigkeiten (Zerfall des Pions z.B. bei $v = 0.8$ c).

Im Alltag sind Masse und Energie (mit hoher Genauigkeit) separat erhalten. Grund: nichtgeometrische Erhaltungssätze (z.B. Ladung, Leptonenzahl, Baryonenzahl).

Massendefekte: Die Masse eines gebundenen Systems aus den (freien) Einzelmassen m_1 und m_2 ist um den Betrag der Bindungsenergie E_b vermindert.

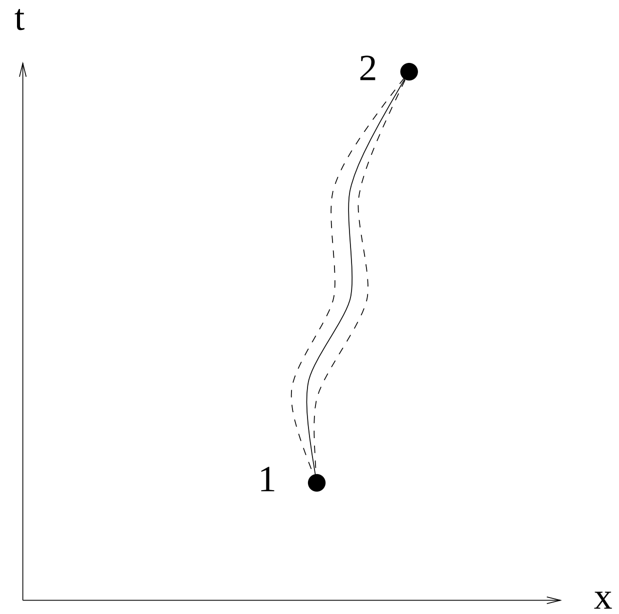
$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{E_b}{m_1 + m_2 - E_b}$$

- Wasserstoffatom: $\Delta\mu/\mu \approx 10^{-8}$ unmessbar klein.
- Atomkerne: $\Delta\mu/\mu \leq 1\%$. Test der Energie-Masse Relation auf 1 in 1000.

- Astrophysik: Bindungsenergie einer homogenen Kugel mit Masse M ist $E_b = 3/5\, GM^2/R$. Wenn Stern aus Gaswolke entsteht, bleibt ihm nur die Masse $M_1 = M - E_b$. Der Rest wird abgestrahlt.

7.5 Prinzip der kleinsten Wirkung, Lagrange-Funktion

Hamiltonsches Prinzip: Für jedes mechanische System gibt es ein *Wirkungsintegral* S, das für die wirklich stattfindende Bewegung extremal wird, d.h. dessen Variation beim Übergang zu infinitesimal benachbarten Bahnen verschwindet.



Universelles Relativitätsprinzip: S hängt nicht von der Wahl des IS ab, ist also ein Lorentz-Skalar.

Freies Teilchen: Eigenzeit zwischen zwei Ereignissen extremal. Dies motiviert den Ansatz

$$S = -\alpha \int_1^2 ds \,.$$

Konstante α wird später bestimmt!

Weltlinie des Teilchens $x^i(\lambda)$, wobei λ wie die Eigenzeit s monoton wächst.

$$ds = \sqrt{\eta_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda}} \, d\lambda$$

Zu variierende Größen: x^i und Ableitungen

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$$

Wirkungsintegral

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \, L(x^i, \dot{x}^i)$$

Lagrange-Funktion

$$L = \sqrt{\eta_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k}$$

Extremalbedingung: $\delta S = 0$ bei Variationen, die an den Endpunkten λ_1 und λ_2 verschwinden.

Herleitung der *Euler-Lagrange-Gleichungen* (für 1+1 Dimensionen, die Verallgemeinerung auf beliebig viele Koordinaten ist einfach):

Änderung von S beim Ersetzen von x durch $x + \delta x$:

$$\delta S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\, L(x + \delta x, \dot{x} + \delta\dot{x}) - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\, L(x, \dot{x})$$

Entwicklung der Differenz nach Potenzen von δx und $\delta\dot{x}$:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\, \left(\frac{\partial L}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\,\delta\dot{x}\right) = 0\,.$$

Man beachte, daß $\delta\dot{x} = (d/d\lambda)\delta x$ und integriere den zweiten Term partiell:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\,\delta x\bigg|_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\, \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{d\dot{x}}\right)\delta x = 0\,.$$

Der erste Term ist Null, da die Variation der Bahn an den Endpunkten verschwindet. Integral soll für beliebige Werte von δx verschwinden.

Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

Für unseren konkreten Fall:

$$\alpha \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\dot{x}^i}{\sqrt{\eta_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}}\right] = 0$$

Identifiziere jetzt λ mit Eigenzeit s:

$$\sqrt{\eta_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k} = \sqrt{u^2} = c$$

Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = 0\,.$$

Darstellung der Wirkung in Systemkoordinaten:

$$S = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} dt\,\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Entwicklung von L für $v \ll c$:

$$L \approx -\alpha c + \alpha c \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

Stimmt mit Newtons Formel überein, wenn $\alpha = mc$.

$$L = -mc^2\,\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Nach den Regeln der analytischen Mechanik:

Impuls:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \gamma\, m \vec{v}$$

Hamiltonfunktion (= Energie):

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \gamma\, m\, c^2$$

Übereinstimmung mit den früheren Definitionen dieser Größen.