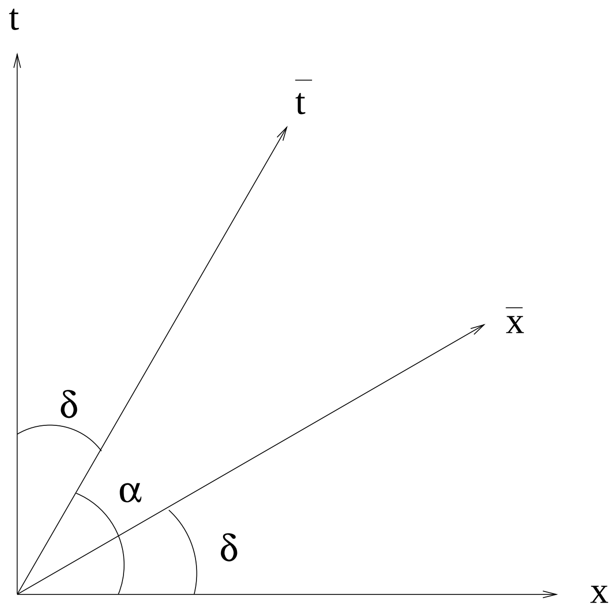
6 Physikalische Konsequenzen der Lorentz-Transformation

Im folgenden meist $c \equiv 1$.

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \gamma(t - v\,x) \\ \bar{x} &= \gamma(x - v\,t) \end{aligned}$$



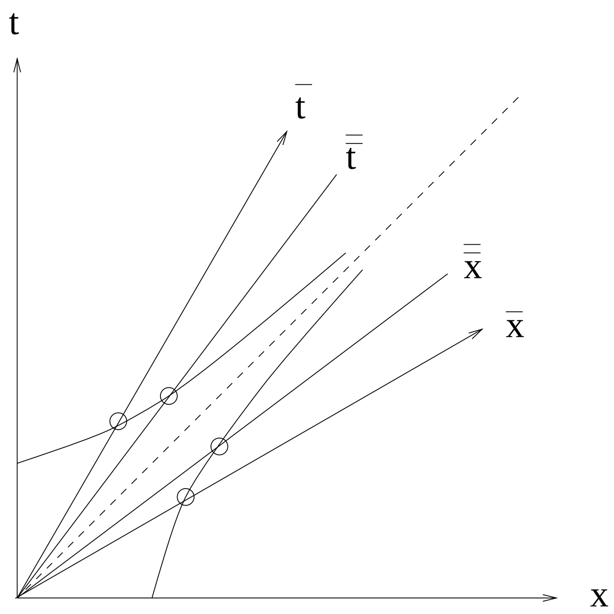
$\bar{x}$-Achse def. durch $\bar{t} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad t = vx \quad \rightsquigarrow \quad \tan\delta = v$

$\bar{t}$-Achse def. durch $\bar{x} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x = vt \quad \rightsquigarrow \quad \tan\alpha = 1/v$

Invariant: $t^2 - x^2 = \bar{t}^2 - \bar{x}^2$.

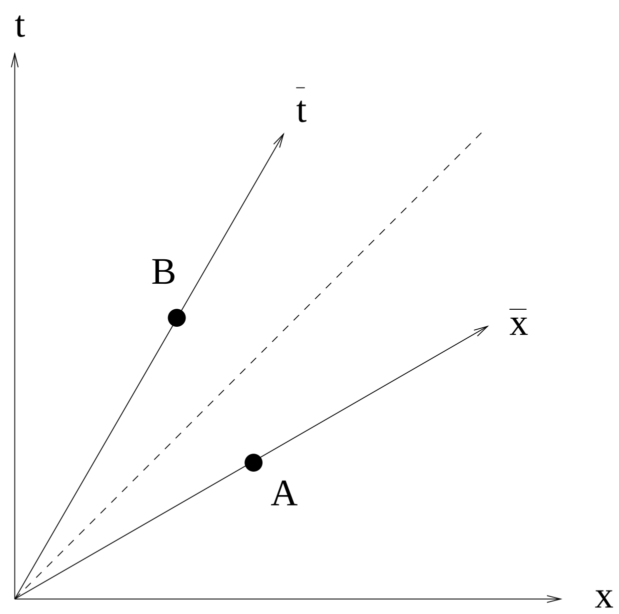
Einheitspunkt auf $\bar{t}$-Achse: $t^2 - x^2 = 1$

Einheitspunkt auf $\bar{x}$-Achse: $x^2 - t^2 = 1$



6.1 Relativität der Gleichzeitigkeit, Kausalität

Gleichzeitigkeit ist keine Invariante unter Wechsel des IS.



I: A tritt später ein als O

$\bar{I}$: A ist gleichzeitig mit O

Wegen $v < 1$ kann die x-Achse nicht über die gestrichelte Linie gedreht werden. B findet für alle Beobachter später als O statt.

$x^2 = t^2 =$ Lichtkegel. Beschreibt den Zeitverlauf einer mit Lichtgeschwindigkeit auf O kontrahierenden und dann reexpandierenden Kugelwellenfront. Lichtartige Vierervektoren.

Jedes Ereignis *außerhalb* des Lichtkegels kann durch geeignete Wahl des IS mit O simultan gemacht werden (*Gegenwart von O*). Raumartige Vierervektoren.

Ereignisse innerhalb des *Vorwärtslichtkegels* sind für alle Beobachter in der *Zukunft* von O. Zeitartige Vierervektoren.
Analog begrenzt der *Rückwärtslichtkegel* die *Vergangenheit* von O.

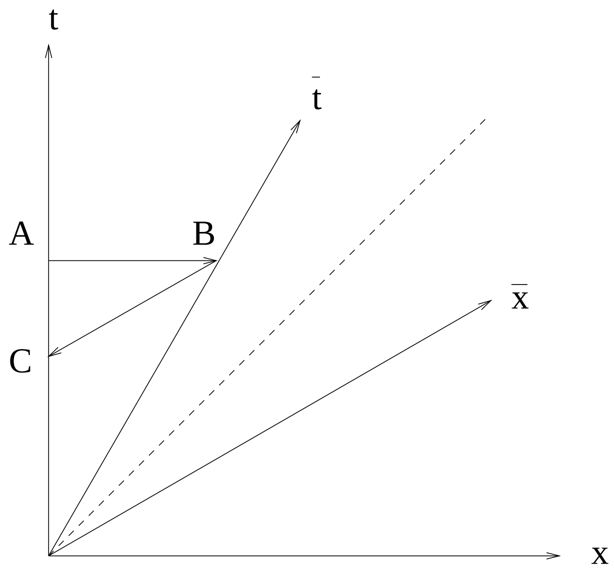
Kausalstruktur:
Ein Ereignis A außerhalb des Lichtkegels kann keinen kausalen Zusammenhang mit O haben, da es ein Koordinatensystem gibt, für den A und O gleichzeitig und räumlich getrennt erscheinen. O kann alle Ereignisse im Vorwärtslichtkegel beeinflussen, und kann von allen Ereignissen im Rückwärtslichtkegel beeinflußt

werden.

6.2 Überlichtgeschwindigkeit

LT für $v > c$ sinnlos. Kein Körper kann sich in irgendeinem IS mit $v > c$ bewegen (siehe auch relativistische Mechanik, später).

Lichtgeschwindigkeit auch obere Grenzgeschwindigkeit für jede Signalausbreitung.



Annahme einer unendlichen Signalgeschwindigkeit: Aussenden eines Signals bei A, Reflektion bei B, Empfang bei C, zeitlich vor A, Widerspruch!

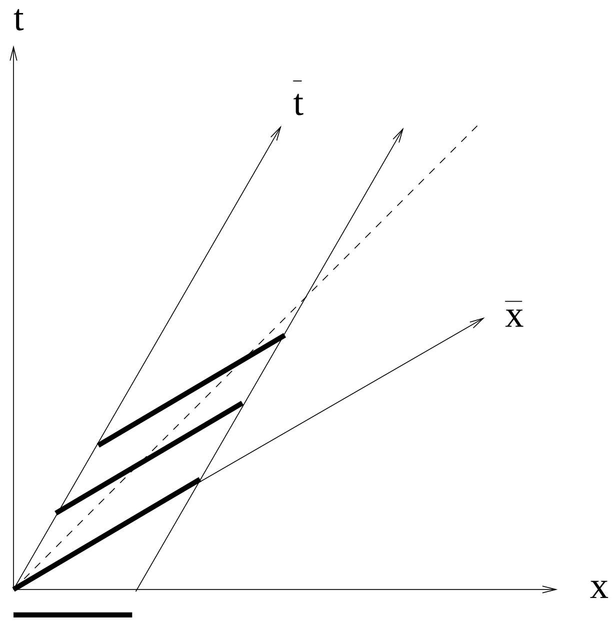
Geschwindigkeit eines Signals (Diskontinuität) in der Regel *Frontgeschwindigkeit* einer Welle

$$v_F = \lim_{k\to\infty} \frac{\omega(k)}{k}$$

Wichtige Folgerung: Es gibt keine starren Körper, sonst wäre Signalübertragung instantan möglich.

6.3 Lorentzkontraktion

Bewegtes Objekt beschrieben durch die Weltlinien seiner "Atome". Größe gegeben durch Lage seiner Punkte zum Zeitpunkt t: Schnitt mit der Fläche $t = const.$



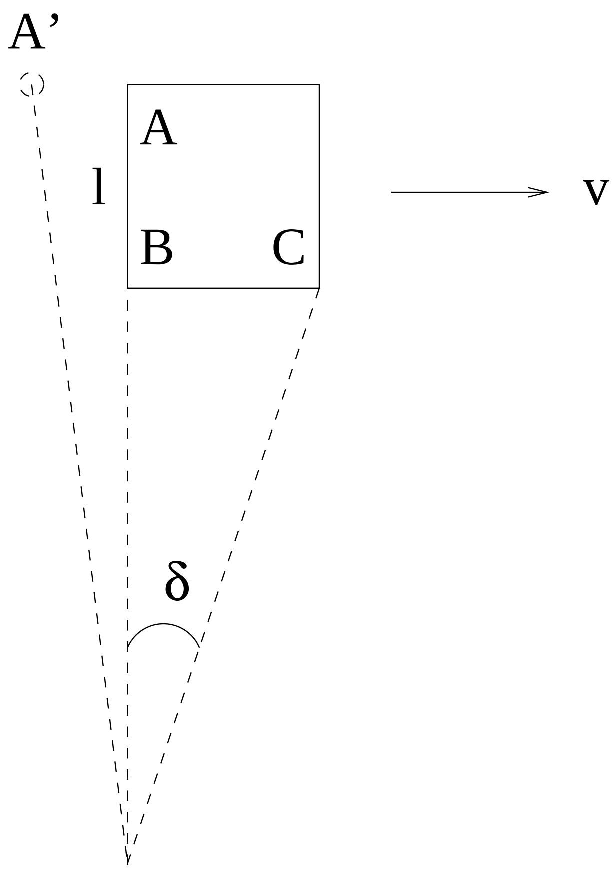
$\Delta\bar{x} = \bar{x} = \gamma\Delta x$, da $\Delta t \equiv 0$.

Daher

$$\Delta x = \sqrt{1-v^2}\,\Delta\bar{x}$$

Wie wirkt sich die Lorentzkontraktion bei visueller bzw. photographischer Beobachtung eines ausgedehnten Objektes aus? (Penrose 1959, Terell 1959)

Visuelle Beobachtung liefert retardierte Position.



Lichtstrahl von Kante A hat längeren Weg, trifft verspätet ein und erscheint daher bei A'.

Größe des Objekt sehr klein gegen Abstand $\rightsquigarrow$ Lichtwege können in guter Näherung als parallel angenommen werden.

Licht von A muß $\Delta t = l$ früher emittiert werden. Würfel bewegt sich in dieser Zeit $\Delta x = v\Delta t = v\,l$ nach rechts. Daher $\overline{AA'} = v\,l$.

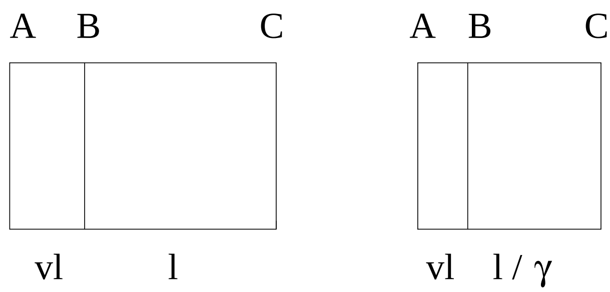


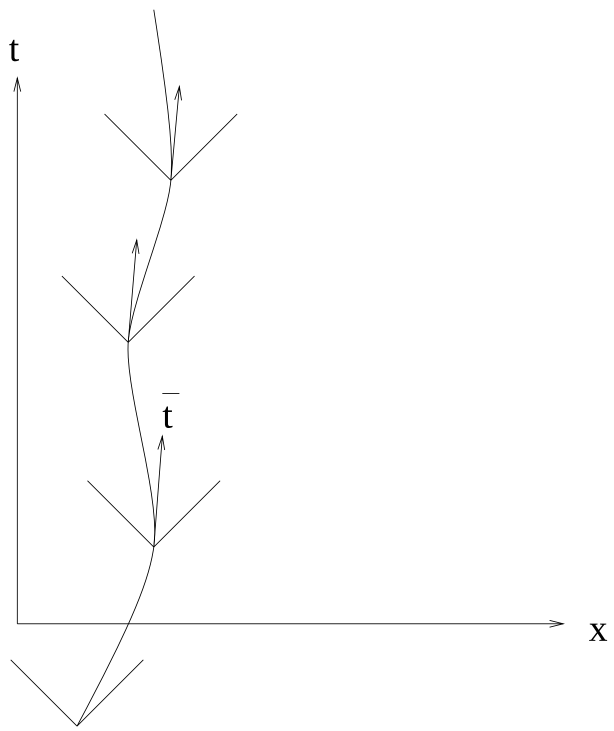
Bild mit Lorentzkontraktion ist Bild eines um $\alpha = \arcsin v$ *verdrehten* ruhenden Würfels.

6.4 Eigenzeit und Zeitdilatation

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = d\bar{t}^2 - d\bar{x}^2$$

ist lorentzinvariant.

Zur Interpretation



Instantanes Ruhesystem: $d\bar{x} = 0$, $ds = d\bar{t}$, $\bar{t}$-Achse parallel zur Tangente an die Weltlinie.

ds = Eigenzeitintervall = auf der mitgeführten Uhr angezeigtes Zeitintervall

Im System I: $x = x(t)$

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = dt^2(1 - v^2) < dt^2$$

Bewegte Uhren gehen langsamer (Zeitdilatation)!
Endliche Zeitintervalle (auch bei nichtkonstanter Geschwindig-

keit) durch Integration:

$$s(t_1) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} dt\,\sqrt{1 - v^2(t)}$$

6.5 Hafele-Keating-Experiment

Atomuhren können heute die relativistischen Zeiteffekte mit einer Genauigkeit von etwa 1 % bestätigen.

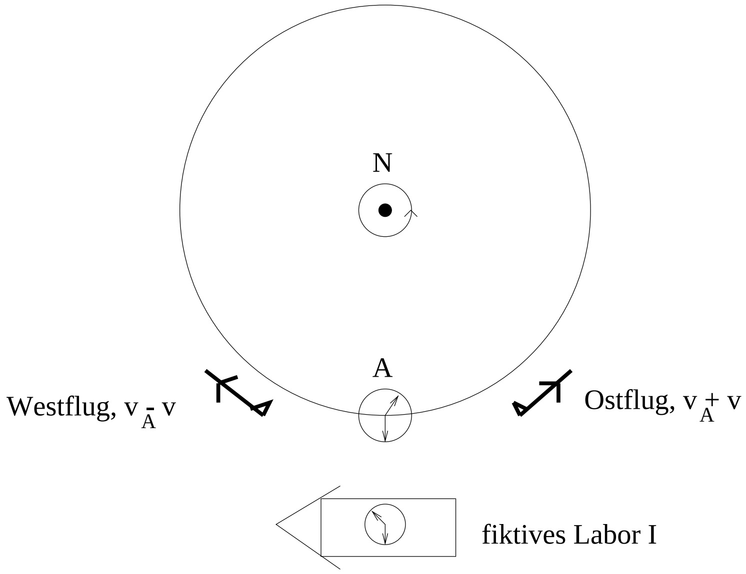
Erstes Experiment zur Zeitdilatation mit kommerziellen Atomuhren in Flugzeugen: Hafele und Keating 1971.

Zusätzlich zum SRT-Effekt: Uhren im Gravitationsfeld gehen langsamer!

Eine Uhr, die sich im Schwerefeld der Erde um die Höhe H weiter oben befindet als eine Vergleichsuhr, geht nach der Zeit t um die Zeitspanne

$$\Delta t_g = \frac{gH}{c^2}\,t$$

vor, wenn die Uhren anfänglich auf gleichen Stand gebracht wurden. (Herleitung später).



t_I = Zeit im (fiktiven) Labor I

v_A = 40 000 km/24h = 1667 km/h

Flugzeuggeschwindigkeit relativ zur Lufthülle: v = 800 km/h

Geschwindigkeiten des Flugzeugs relativ zu I:

Westflug: $v_{\mathrm{West}} = v_A - v$ = 867 km/h

Ostflug: $v_{\mathrm{Ost}} = v_A + v$ = 2467 km/h

Ohne Gravitationseffekt, aus der Sicht von I:

$t_{\mathrm{Ost}} < t_A < t_{\mathrm{West}}$

<u>Gravitationseffekt</u>:

Flugzeit ca. 50 h, H = 10 km $\rightsquigarrow$ Δt_g=196 ns.

Um diesen Betrag gehen beide die Flugzeuguhren *vor*.

Effekte durch die <u>Bewegung</u>:

$$\begin{aligned} t_A &= t_I \sqrt{1 - v_A^2/c^2} \\ t_{\text{Ost}} &= t_I \sqrt{1 - v_{\text{Ost}}^2/c^2} \\ t_{\text{West}} &= t_I \sqrt{1 - v_{\text{West}}^2/c^2} \end{aligned}$$

Zeitdifferenzen zur Uhr bei A, als Funktion von t_A:

$$\Delta t_{v,\text{West/Ost}} = t_{\text{Ost,West}} - t_A \approx t_A \left(\frac{v_A^2}{2c^2} - \frac{v_{\text{West/Ost}}^2}{2c^2} \right)$$

Zahlenwerte für jeweils eine Erdumrundung einsetzen:

$$\begin{aligned} \Delta t_{v,\text{Ost}} &= -255 \text{ ns, geht nach} \\ \Delta t_{v,\text{West}} &= +156 \text{ ns, geht vor} \end{aligned}$$

Berücksichtigung des Gravitationseffekts:

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{Ost}} &= -255 + 196 \text{ ns} = -\ 59 \text{ ns} \\ \Delta t_{\text{West}} &= +156 + 196 \text{ ns} = +352 \text{ ns} \end{aligned}$$

Theoretischer Wert/Experimenteller Wert:
0.68 ± 0.39 (Ostflug) und 1.007 ± 0.077 (Westflug)

Relative Genauigkeit bei Ostflug kleiner, da Geschwindigkeits- und Gravitationseffekt sich zum Teil kompensieren.

6.6 Experimente mit Elementarteilchen

Zeitdilation verlängert im Labor gemessene Lebensdauer von bewegten Elementarteilchen!
Z.B. Myonen:

$$\mu \to e + 2\,\nu$$

Halbwertszeit für Zerfall im Ruhsystem des Myons: $\tau = 1.52\,\mu$s

1941 Rossi & Hall: Untersuchung des Zerfalls von Myonen in der Atmosphäre.

CERN 1959: μ-Teilchen im Speicherring mit 14 m Durchmesser, Bahngeschwindigkeit $v = 0.99942\,c$.

SRT-Vorhersage:

$$\tau(v) = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 29.4\,\tau = 44.6\,\mu\text{s}$$

Übereinstimmung Experiment/Theorie perfekt innerhalb der experimentellen Fehler von 0.2 %.