# 5 Lorentz-, Poincarégruppe, Minkowski-Geometrie

## 5.1 Gruppenstruktur

Die Menge der Transformationen $\mathcal{P}$ zwischen IS hat die Struktur einer Gruppe, abstrakt definiert durch:

- Assoziativität: $(g_1\, g_2)\, g_3 = g_1\, (g_2\, g_3)$
- Einheitselement: Es existiert ein Einheitselement, so daß $eg = ge = g$ für alle $g \in G$
- Inverses: Zu jedem $g \in G$ gibt es ein Element $g^{-1} \in G$ mit $g^{-1}\, g = g\, g^{-1} = e$

Hier: Multiplikation = Komposition (Hintereinanderschaltung), Einheitselement = identische Transformation, Inverses = Umkehrtransformation.

## 5.2 Lorentz- und Poincaré-Gruppe

Neue Notation:

$$(ct, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Konvention: schreibe Striche, Balken oder sonstige Merkmale, um verschiedene IS zu unterscheiden, an den Index.
Beispiele: $x^{\bar{1}}$, $x^{\bar{i}}$, $x^{\tilde{i}}$, $x^{i'}$

*Poincaré-Transformationen*

$$x^{\bar{i}} = f^i\left(x^k\right)$$

sind diejenigen Transformationen, die das Linienelement

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 = \eta_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

invariant lassen.

*Metrischer Tensor*

$$\eta = (\eta_{ik}) = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1) = (\eta_{ki})$$

*Einsteinsche Summenkonvention:* Summiere über alle Indizes, die zweimal auftauchen (einmal unten und einmal oben).

Vereinbarung: lateinische Indizes laufen von 0 bis 3 laufen, griechische von 1 bis 3.
Beispiele:

$$\begin{aligned} x_i x^i &= \sum_{i=0}^{3} x_i x^i \\ x_\alpha x^\alpha &= \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha x^\alpha \end{aligned}$$

Warnung: in den meisten Büchern bzw. Artikeln ist die Rolle von griechischen und lateinischen Indizes vertauscht!

Nachrechnen der Invarianz von $ds^2$ am Beispiel der bereits hergeleiteten LT:

$$
\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - \beta ct) \\
y' &= y \\
z' &= z \\
ct' &= \gamma(ct - \beta x)
\end{aligned}
$$

Bilde die Differentiale:

$$
\begin{aligned}
dx' &= \gamma(dx - \beta cdt) \\
dy' &= dy \\
dz' &= dz \\
cdt' &= \gamma(cdt - \beta dx)
\end{aligned}
$$

$$c^2(dt')^2 - (dx')^2 = \gamma^2 \left(1 - \beta^2\right) \left(c^2dt^2 - dx^2\right) = c^2(dt)^2 - (dx)^2$$

Herleitung von Folgerungen aus der Invarianzbedingung:

$$\eta_{ik}\, dx^i\, dx^k = \eta_{mn}\, dx^{\bar{m}}\, dx^{\bar{n}}$$

Es gilt:

$$dx^{\bar{m}} = \frac{\partial x^{\bar{m}}}{\partial x^i}\, dx^i$$

Wichtig: Der hochgestellte $i$-Index unter dem Bruchstrich wird als Unten-Index gezählt.

$$\eta_{mn} \frac{\partial f^{\bar{m}}}{\partial x^i} \frac{\partial f^{\bar{n}}}{\partial x^j} \, dx^i \, dx^j = \eta_{ij} \, dx^i \, dx^j$$

Wegen der Willkür der $dx^i$:

$$\eta_{mn} \frac{\partial f^{\bar{m}}}{\partial x^i} \frac{\partial f^{\bar{n}}}{\partial x^j} = \eta_{ij} \qquad\qquad (LB)$$

Zeigen jetzt, daß $f$ <u>umkehrbar</u> und <u>linear</u>.
Invarianzbedingung auffassen als Matrix-Gleichung:

$$(Df)^T \, \eta \, (Df) = \eta$$

$Df$ ist das Differential von $f$ = Matrix der partiellen Ableitungen:

$$(Df)^m{}_i = \frac{\partial f^{\bar{m}}}{\partial x^i}$$

Multiplikationsregel für Determinanten:
$\det(A) \det(B) = \det(AB)$ und $\det(A^T) = \det(A)$, daher
$\det(Df) = \pm 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ eindeutige Umkehrbarkeit.

Differenziere $(LB)$ nach $x^j$, permutiere die Indizes $i, j, k$ zyklisch, addiere zwei der entstehenden Gleichungen, subtrahiere die dritte.

$$\eta_{mn} \frac{\partial f^{\bar{n}}}{\partial x^k} \frac{\partial^2 f^{\bar{m}}}{\partial x^j \partial x^i} = 0$$

Wegen $\det(Df) \neq 0$ verschwinden die zweiten Ableitungen von $f$, $f$ ist also linear:

$$x^{\bar{i}} = L^i{}_k \, x^k + a^i$$

Koeffizienten $L^i{}_k$ der homogenen Transformation eingeschränkt durch

$$\eta_{mn} L^m{}_i L^n{}_k = \eta_{ik}$$

Bemerkung: Aus dieser Bedingung kann man die explizite Gestalt von $L$ herleiten, siehe z.B. Jackson, Klassische Elektrodynamik, Kapitel 11.7.

Die umkehrbaren Transformationen, die $ds^2$ invariant lassen, bilden eine Gruppe, die *Poincaré*-Gruppe (= *inhomogene Lorentz-Gruppe*).

Darstellung in Matrix-Vektor-Notation:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= Lx + a \\ L^T \eta L &= \eta\end{aligned}$$

Vergleiche $O^T O = id$ für Drehungen!

Zusammensetzungsregel für Poincaré-Transformationen:

$$(\bar{a}, \bar{L})(a, L) = (\bar{a} + \bar{L}a, \bar{L}L)$$

Die homogenen LT ($a = 0$) bilden eine Untergruppe $\mathcal{L}$ von $\mathcal{P}$, die *Lorentz-Gruppe*. Diese besteht aus:

- Boosts $\Lambda$, parametrisiert durch die drei Komponenten von $\vec{v}$
- räumlichen Rotationen $R$, parametrisiert z.B. durch drei Eulerwinkel
- Spiegelung der Zeitachse $\theta$, $t \to -t$
- Spiegelung der räumlichen Komponenten $\Pi$, $\vec{x} \to -\vec{x}$

Matrix-Darstellung für Boosts ($\hat{\beta} = \vec{\beta}/\beta$):

$$
(\Lambda^i{}_k) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x\gamma & -\beta_y\gamma & -\beta_z\gamma \\ -\beta_x\gamma & 1+(\gamma-1)\hat{\beta}_x^2 & (\gamma-1)\hat{\beta}_x\hat{\beta}_y & (\gamma-1)\hat{\beta}_x\hat{\beta}_z \\ -\beta_y\gamma & (\gamma-1)\hat{\beta}_x\hat{\beta}_y & 1+(\gamma-1)\hat{\beta}_y^2 & (\gamma-1)\hat{\beta}_y\hat{\beta}_z \\ -\beta_z\gamma & (\gamma-1)\hat{\beta}_x\hat{\beta}_z & (\gamma-1)\hat{\beta}_y\hat{\beta}_z & 1+(\gamma-1)\hat{\beta}_z^2 \end{pmatrix}
$$

Räumliche Drehungen, z.B. Drehung um die $z$-Achse, mit Winkel $\theta$:

$$
(R^i{}_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Räumliche Spiegelung:

$$
(\Pi^i{}_k) = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)
$$

Zeitspiegelung:

$$
(\theta^i{}_k) = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)
$$

Die beiden diskreten Transformationen sind nicht stetig mit dem Einselement verbunden. $\mathcal{L}$ zerfällt in vier Teile.
$\det(L) = \pm 1$ erlaubt Zerlegung in $\mathcal{L}_+$ und $\mathcal{L}_-$.

Z.B. $\Pi \in \mathcal{L}_-$, $\theta \in \mathcal{L}_-$, $\Pi\theta \in \mathcal{L}_+$

Weitere Unterscheidung durch ${L^0}_0$:

$$\eta_{mn} {L^m}_0 {L^n}_0 = \eta_{00} = 1$$

bzw.

$$\left({L^0}_0\right)^2 - \sum_{k=0}^{3} \left({L^k}_0\right)^2 = 1$$

woraus folgt

$$\left({L^0}_0\right)^2 \geq 1$$

$\rightsquigarrow \quad \mathcal{L}^\uparrow$ und $\mathcal{L}^\downarrow$

Vier Zusammenhangskomponenten:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_+^\uparrow &: \det(L) = +1, \ \ \mathrm{sign} {L^0}_0 = +1 \ \ \text{enthält } id \\
\mathcal{L}_-^\uparrow &: \det(L) = -1, \ \ \mathrm{sign} {L^0}_0 = +1 \ \ \text{enthält } \Pi \\
\mathcal{L}_+^\downarrow &: \det(L) = +1, \ \ \mathrm{sign} {L^0}_0 = -1 \ \ \text{enthält } \Pi\theta \\
\mathcal{L}_-^\downarrow &: \det(L) = -1, \ \ \mathrm{sign} {L^0}_0 = -1 \ \ \text{enthält } \theta
\end{aligned}$$

Nur $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ist für sich allein eine Gruppe, die anderen Komponenten enthalten kein $id$.

Aber:

- $\mathcal{L}^{\uparrow} = \mathcal{L}_+^{\uparrow} \cup \mathcal{L}_-^{\uparrow}$ orthochrone Lorentz-Gruppe
- $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^{\uparrow} \cup \mathcal{L}_+^{\downarrow}$ eigentliche Lorentz-Gruppe
- $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_+^{\uparrow} \cup \mathcal{L}_-^{\downarrow}$ orthochore Lorentz-Gruppe

Im allgemeinen genügt es, die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ zu betrachten.

Gruppenstruktur der Poincaré-Gruppe von fundamentaler Relevanz z.B. in der Quantenfeldtheorie: Relativistische Zustände sind Elemente des Darstellungsraumes der unitären Darstellungen von $\mathcal{P}$.

$\rightsquigarrow$ Tensordarstellungen, Spinordarstellungen

Literatur:

S. Weinberg, Feynman Rules for Any Spin, Phys. Rev. B 133 (1964) 1318

S. Weinberg, Feynman Rules for Any Spin, II: Massless Particles, Phys. Rev. B 134 (1964) 882

## 5.3 Minkowski-Raum. Vierervektoren

Quadrupel $x^i$ bilden 4-dimensionalen Vektorraum $\mathbf{X^4}$.

Transformation $x^{\bar{i}} = x^{\bar{i}}(x^k)$ affin linear, daher $\mathbf{X^4}$ affiner Raum.

Verbindungsvektoren $\Delta x$ zwischen Ereignispaaren transformieren homogen:

$$\Delta x^{\bar{i}} = L^{i}{}_{k} \Delta x^{k}$$

Sie bilden einen vierdimensionalen Vektorraum $\mathbf{V^4}$.

Invariantes "Längenquadrat":

$$(\Delta x)^2 = \eta_{ik}\, \Delta x^i\, \Delta x^k$$

$(\Delta x)^2$ hängt nicht vom IS ab, in dem es ausgewertet wird.

*Minkoswki-Raum* = Raum-Zeit mit dieser pseudometrischen Struktur

<u>Definition:</u> Ein physikalisches Objekt $u$, das bezüglich jedes Inertialsystems I ebenso wie $\Delta x$ durch 4 Komponenten $u^i$ festgelegt ist, und das beim Übergang zu einem anderen System $\bar{I}$ gemäß

$$u^{\bar{i}} = L^{i}{}_{k} u^{k}$$

umzurechnen ist, nennt man *Vierervektor*.

Vektorraum-Struktur leicht nachzurechnen.

Viererquadrat:

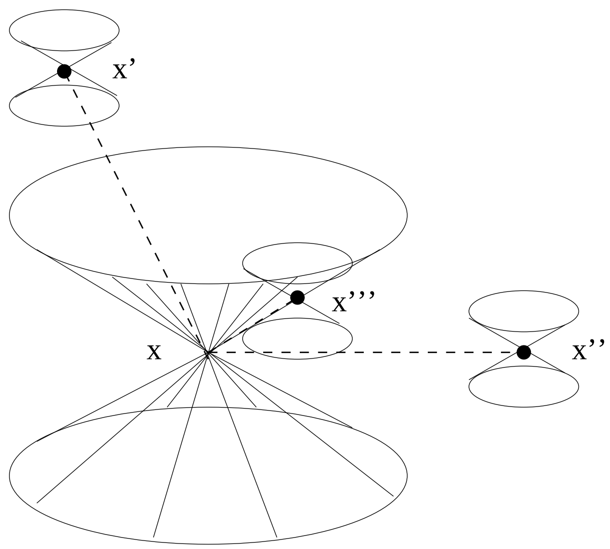
$$u^2 = \eta_{ik}\, u^i u^k = (u_0)^2 - \vec{u}^2$$

Skalarprodukt:

$$uw = \frac{1}{2}\left((u+w)^2 - u^2 - w^2\right) = \eta_{ik} u^i w^k = u^0 w^0 - \vec{u}\,\vec{w} = wu$$

Viererquadrat und Skalarprodukt sind Prototypen lorentzinvarianter Ausdrücke: *Viererskalare = Lorentzskalare*
$u^2$ nicht definit und kann 0 sein, ohne daß $u = 0$

$$\begin{array}{lll} u^2 > 0 & \text{zeitartige} & \\ u^2 = 0 & \text{lichtartige} & \text{Vierervektoren} \\ u^2 < 0 & \text{raumartige} & \end{array}$$




- Zeitartige Trennung $(x, x')$: Das Ereignis $x'$ liegt innerhalb des Lichtkegels von $x$, also in Zukunft oder Vergangenheit.

- Raumartige Trennung $(x, x'')$: Das Ereignis $x''$ gehört zur Gegenwart von $x$.
- Lichtartige Trennung $(x, x''')$: Das Ereignis $x'''$ liegt auf dem Lichtkegel von $x$.

Einschränkung auf LT ohne Umkehrung des Zeitsinns:
$u^2 > 0 \quad \rightsquigarrow \quad u^0 > 0$, und gilt $u^0 > 0$ in $I$, so auch in einem beliebigen anderen IS $\bar{I}$.

Beweis:
Sei $u^2 > 0$ und $u^0 > 0$, dann

$$(u^0)^2 - \vec{u}^2 > 0 \quad \rightsquigarrow \quad u^0 > |\vec{u}| \geq 0$$

Benutze jetzt $|\vec{\beta}| < 1$ für Relativ-Geschwindigkeiten zwischen IS. Cauchy-Ungleichung

$$|\vec{u} \cdot \vec{\beta}| \leq \vec{u}|\,|\vec{\beta}| \leq |\vec{u}| < u^0 \quad \rightsquigarrow \quad u^{\bar{0}} = \gamma(u^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{u}) > 0$$

Analog für den Fall $u^2 = 0$.

Ein Vierervektor mit $u^0 > 0$ heißt *zukunftsgerichtet*, einer mit $u^0 < 0$ *vergangenheitsgerichtet*.
Zukunftsgerichtete lichtartige bzw. zeitartige Vektoren $\rightarrow$ *Vorwärtslichtkegel*, entsprechend ist ist der *Rückwärtslichtkegel* definiert.

## 5.4 Normalformen

*Zeitartiger Vektor* $u$: Es gibt stets ein Inertialsystem $\bar{I}$ (das *Ruhesystem* von $u$, in dem die Komponenten die Normalform

$$\left(u^{\bar{i}}\right) = \left(\pm\sqrt{u^2}, \vec{0}\right)$$

annehmen ($\pm$ je nach Zeitorientierung).

*Raumartige Vektoren* lassen sich durch Wahl eines geeigneten Bezugssystems stets auf die Form

$$\left(u^{\bar{i}}\right) = \left(0, \sqrt{-u^2}, 0, 0\right)$$

bringen.

*Lichtartiges* $u$ läßt sich zu

$$\left(u^{\bar{i}}\right) = (\pm 1, 1, 0, 0)$$

transformieren.

## 5.5 Kovariante und kontravariante Vektorkomponenten

$u^i$ heißen *kontravariante* Vektorkomponenten.
*Kovariante* Komponenten definiert durch

$$u_i = \eta_{ik} u^k = (u^0, -u^1, -u^2, -u^3)$$

Damit z.B.

$$u\,w = \eta_{ik} u^i w^k = u_i w^i = u^i w_i$$

Umkehr-Relation: Inverse des metrischen Tensors mit Komponenten $\eta^{ik}$ definiert durch

$$\eta^{ik}\,\eta_{kj} = \delta^i_j$$

Für $\eta = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$ gilt

$$\eta^{ik} = \eta_{ik}$$

Kontravariant aus kovariant:

$$u^i = \eta^{ik}\, u_k$$

Transformationsverhalten der kovarianten Komponenten:

$$u_{\bar{i}} = \eta_{ik}\, u^{\bar{k}} = \eta_{ik}\, L^k{}_j\, u^j = \eta_{ik}\, L^k{}_j\, \eta^{jm} u_m$$

Dies wird geschrieben als

$$u_{\bar{i}} = L_i{}^m\, u_m$$

mit

$$L_i{}^m = \eta_{ik}\, L^k{}_j\, \eta^{jm}$$

Wichtiges Beispiel für einen auf natürliche Weise kovarianten Vektor ist der *Vierergradient*.

Skalares Feld: $x \to \varphi(x)$
Verhalten unter LT:

$$\varphi(x) = \varphi(x^k) = \bar{\varphi}(x^{\bar{k}}) = \bar{\phi}(\bar{x})$$

Definition des Vierergradienten:

$$\begin{aligned} \partial_i \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \varphi_{,i} \\ \partial_{\bar{i}} \bar{\varphi} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^{\bar{i}}} = \bar{\varphi}_{,\bar{i}} \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel gilt:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^{\bar{i}}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{\bar{i}}}$$

Wegen $dx^{\bar{i}} = L^i{}_j dx^j$ gilt die Umkehrung

$$dx^k = L_i{}^k \, dx^{\bar{i}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial x^k}{\partial x^{\bar{i}}} = L_i{}^k$$

Daher transformiert sich der Gradient tatsächlich wie ein kovarianter Vektor.