3 Herleitung der Lorentz-Transformation

3.1 Inertialsysteme

Inertialsystem (IS) = Bezugssystem, in dem Probeteilchen sich geradlinig gleichförmig (auf Geraden in Raum-Zeit) bewegen.
Dies ist äquivalent mit der Feststellung, daß keine Kräfte wirken (z.B. Gravitation, Beschleunigung durch Rotation).
Inertialsystem sind Idealisierungen, die sich nur näherungsweise realisieren lassen (z.B. durch Einschränkung auf ein hinreichend kleines Raum-Zeit-Gebiet).
Inertialsysteme bewegen sich relativ zueinander mit konstanten Geschwindigkeiten.

3.2 Leistungen der SRT

- Umrechnung von "Messungen", die in einem IS gemacht werden, in ein beliebiges anderes IS
  $\rightarrow$ Lorentz-Transformationen (LT),
- Herleitung von Folgerungen aus der Forderung, daß sich die Naturgesetze "kovariant" unter LT transformieren müssen.

Die LT kann aus 3 Postulaten hergeleitet werden, siehe z.B.
V. Berzi und V. Gorini, J. Math. Phys. 10 (1969) 1518.

3.3 Postulate der SRT

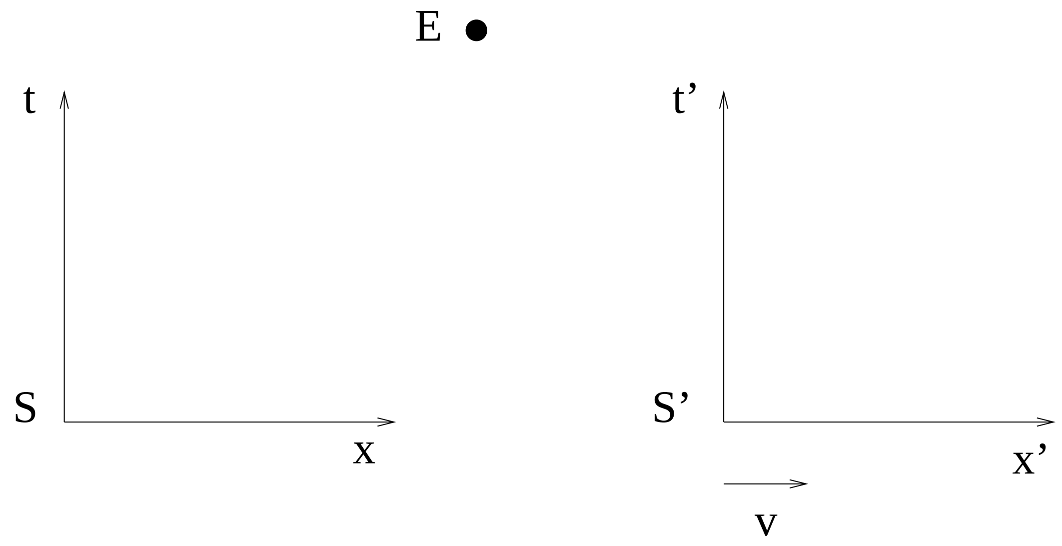
R: Es gilt das *Relativitätsprinzip*: Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Die Naturgesetze können daher so formuliert werden, daß sie beim Wechsel von einem Inertialsystem zu einem anderen ihre Form nicht ändern.

H: Raum-Zeit ist *homogen*, d.h. kein Punkt oder Gebiet in Raum-Zeit ist ausgezeichnet.

I: Der Raum ist *isotrop*, d.h. im Raum ist keine Richtung ausgezeichnet.

3.4 Setup und Fragestellung

Eine Raumdimension, eine Zeitdimension, Verallgemeinerung später.
Zwei Inertialsysteme S und S'. Die Geschwindigkeit des Ursprungs von S' im System S sei v.



Ein Ereignis E habe in S die Koordinaten $\xi = (x, t)$, in S' die Koordinaten $\xi' = (x', t')$.

Gesucht ist die Funktion f, mit der man diese Koordinaten ineinander umrechnet:

$$\xi' = f(\xi)$$

3.5 f ist linear!

H $\rightsquigarrow$ $\xi' = f(\xi)$ invariant unter Verschiebungen:

$$f(\xi + \alpha) = \xi' + \alpha' = f(\xi) + \alpha'$$

α' darf von f und α abhängen, nicht aber von ξ.
Spezialfall $\xi = 0$:

$$f(\alpha) = f(0) + \alpha' \quad \rightsquigarrow \quad \alpha' = f(\alpha) - f(0)$$

Einsetzen $\rightsquigarrow$

$$f(\xi + \alpha) = f(\xi) + f(\alpha) - f(0)$$

Definition: $g(\xi) \equiv f(\xi) - f(0)$

$$g(\xi + \alpha) = g(\xi) + g(\alpha)$$

Satz: g stetig im Ursprung $\rightsquigarrow g(\lambda\xi) = \lambda\, g(\xi)$.
g ist also linear und homogen.
Im folgenden o.B.d.A. $f(0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad f = g$, d.h. zur Zeit $t = 0$ fallen die Koordinatenursprünge von S und S' zusammen.

Allgemeinste Abbildung, die homogen und linear ist:

$$\begin{aligned} x' &= a(v)\, x + b(v)\, t && (T1) \\ t' &= c(v)\, x + d(v)\, t \end{aligned}$$

3.6 Reziprozität

Geschwindigkeit v von S' in S kann durch a und b ausgedrückt werden:

$$x' = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x = -\frac{b(v)}{a(v)}\, t \quad \rightsquigarrow \quad v = -\frac{b(v)}{a(v)}$$

<u>Annahme:</u> Raum-Achsen von S und S' zeigen in die gleiche Richtung. Zeit fließt in beiden Systemen im gleichen Sinn.

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\partial x'}{\partial x} &= a(v) > 0 \qquad\qquad (UG) \\
\tfrac{\partial t'}{\partial t} &= d(v) > 0
\end{aligned}
$$

$w =$ Geschwindigkeit des Ursprungs von S im System S':

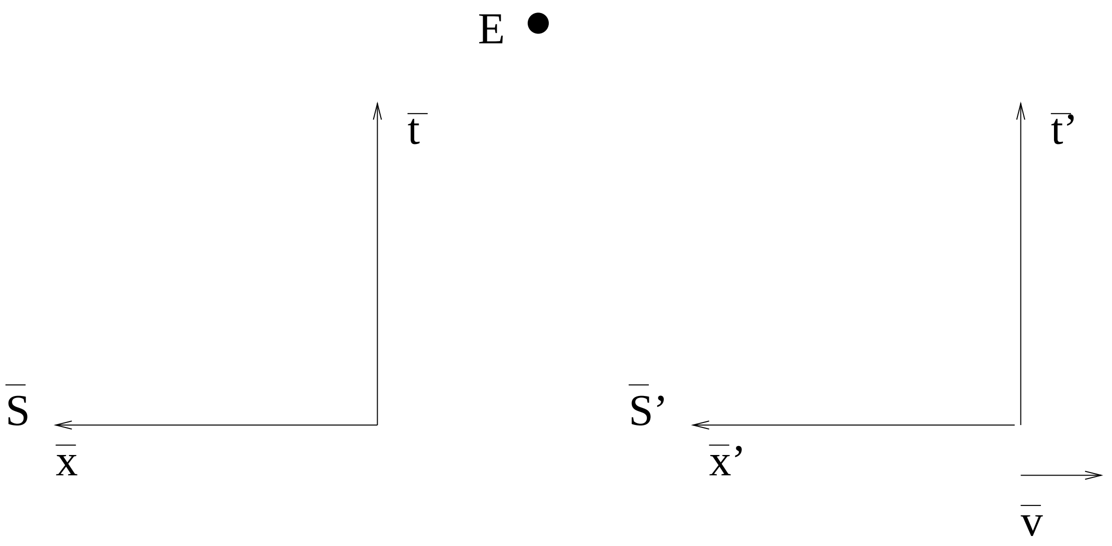
$$x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x' = b(v)\,t = \frac{b(v)}{d(v)}\,t' \quad \rightsquigarrow \quad w = \frac{b(v)}{d(v)} \equiv \varphi(v)$$

$$\mathbf{R} \quad \rightsquigarrow \quad v = \varphi(w) = \varphi(\varphi(v))$$

3.7 Bestimmung der Funktion φ

Spiegelung der Ortsachsen in S und in S':

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= -x \qquad\qquad (NK) \\
\bar{t} &= t \\
\bar{x}' &= -x' \\
\bar{t}' &= t'
\end{aligned}
$$



I $\rightsquigarrow$ Transformationsgleichungen für die neuen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= a(\bar{v})\,\bar{x} + b(\bar{v})\,\bar{t} \\ \bar{t}' &= c(\bar{v})\,\bar{x} + d(\bar{v})\,\bar{t} \end{aligned} \qquad (T2)$$

$\bar{v}$ = Geschwindigkeit von $\bar{S}'$ in $\bar{S}$:
Einsetzen von (NK) in $(T1)$ ergibt:

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= a(v)\,\bar{x} - b(v)\,\bar{t} \\ \bar{t}' &= -c(v)\,\bar{x} + d(v)\,\bar{t} \end{aligned} \qquad (T3)$$

Man liest ab: $\bar{v} = b(v)/a(v) = -v$.
Vergleich von $(T2)$ mit $(T3)$:

$$\begin{aligned} a(-v) &= a(v) \\ b(-v) &= -b(v) \\ c(-v) &= -c(v) \\ d(-v) &= d(v) \end{aligned} \qquad (VR)$$

a und d sind gerade, b und c sind ungerade. Also ist $\varphi = b/d$ ungerade.

Satz:

- $\varphi(-v) = -\varphi(v)$
- $\varphi(\varphi(v)) = v$
- Definitionsbereich von φ reelles Intervall
- φ stetig

dann *entweder*

- $\varphi(v) = v$ *oder*
- $\varphi(v) = -v$

$\varphi(v) = v$ zieht $d = -a$ nach sich, und das ist im Widerspruch zu (UG), daher

$$\varphi(v) = -v$$

und

$$b(v)/d(v) = -v = b(v)/a(v) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} d &= a \\ b &= -v\,a \end{aligned}$$

Einsetzen in $(T1)$:

$$\begin{aligned} x' &= a(v)\,x - v\,a(v)\,t \\ t' &= c(v)\,x + \quad a(v)\,t \end{aligned}$$

3.8 Bestimmung von c

Inverse Transformation:

$$\begin{aligned} x &= \Delta^{-1}(v)\, a(v)\, x' + \Delta^{-1}(v)\, v\, a(v)\, t' \qquad (T5)\\ t &= -\Delta^{-1}(v)\, c(v)\, x' + \Delta^{-1}(v) \quad a(v)\, t' \end{aligned}$$

mit

$$\Delta(v) = a(v)\,[a(v) + v\, c(v)]$$

$w = -v$, daher:

$$\begin{aligned} x &= a(-v)\, x' + v\, a(-v)\, t' \qquad (T6)\\ t &= c(-v)\, x' + \quad a(-v)\, t' \end{aligned}$$

Vergleich unter Benutzung von (VR):

$$a(v) = \frac{1}{a(v) + v\, c(v)}$$

so daß

$$c(v) = \frac{1}{v}\,(1/a(v) - a(v))$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} x' &= a(v)\, x - v\, a(v)\, t \qquad (T7)\\ t' &= \tfrac{1}{v}\,(1/a(v) + a(v))\; x + \; a(v)\, t \end{aligned}$$

3.9 Bestimmung von a

LT bilden eine Gruppe: Komposition von 2 LT vom Typ $(T7)$ mit v und v' soll wieder vom Typ $(T7)$ mit geeignet gewähltem v''.

Abkürzung: $a(v) = a$, $a(v') = a'$.

$$\begin{pmatrix} a & -va \\ \frac{1}{v}(a^{-1} - a) & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -v'a' \\ \frac{1}{v'}(a'^{-1} - a') & a' \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} aa' - \frac{v}{v'}a(a'^{-1} - a') & -(v + v')aa' \\ \frac{a'}{v}(a^{-1} - a) + \frac{a}{v'}(a'^{-1} - a') & aa' - \frac{v'}{v}a'(a^{-1} - a) \end{pmatrix}$$

Diagonalelemente in $(T7)$ sind gleich, daher

$$aa' - \frac{v}{v'}\,a\,(a'^{-1} - a') = \; aa' - \frac{v'}{v}(a^{-1} - a)$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{v^2}\,(1 - a^{-2}) = \frac{1}{v'^2}\,(1 - a'^{-2})$$

v, v' beliebig, daher notwendig

$$\frac{1}{v^2}\,(1 - a^{-2}) = K \quad \leadsto \quad a = \frac{1}{1 - K\,v^2}$$

K universelle Konstante, $[K] = [Geschwindigkeit]^{-2}$.

Außerdem:

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + K\,v\,v'} \qquad\qquad (AT)$$

Man kann 3 Fälle unterscheiden:

$\underline{K > 0}$

Definiere: $c = K^{-1/2}$= Lichtgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - v\,t) = \gamma(x - \beta\,ct) \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ \gamma &= 1/\sqrt{1-\beta^2} \\ \beta &= v/c \end{aligned}$$

Eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation. Definiert nur für $-c < v < c \quad \rightsquigarrow \quad c$ ist eine obere Grenzgeschwindigkeit.

$\underline{K = 0}$

$$\begin{aligned} x' &= x - v\,t \\ t' &= t \end{aligned}$$

Galilei-Transformation.

$\underline{K < 0}$

führt zu Widersprüchen, z.B. dem, daß zwei gleichgerichtete Geschwindigkeiten sich zu einer Geschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung "addieren können", vergleiche (AT).

3.10 Vereinfachte Herleitung mit Konstanz von c

Wenn man

K: Die Lichtgeschwindigkeit c ist in allen Inertialsystemen dieselbe.

postuliert (also nicht herleitet), kommt man schneller zum Ziel. Ansatz:

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad (LA)$$

Analog wie in der obigen Herleitung zeigt man $\gamma(v) = \gamma(-v)$ und erhält für die Umkehrtransformation mit **R**:

$$x = \gamma(x' + vt')$$

Beide Beobachter senden zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ (zu diesem Zeitpunkt mögen die beiden System zusammenfallen) einen Lichtblitz aus. Nach den Zeiten t bzw. t' ist die Position der Wellenfront gegeben durch $x = ct$ bzw. $x' = ct'$. Auflösen nach den Zeiten und oben einsetzen:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vx/c) &= \gamma x(1 - v/c) \\ x &= \gamma(x' + vx'/c) &= \gamma x'(1 + v/c) \end{aligned}$$

Multipliziere beide Gleichungen miteinander:

$$xx' = \gamma^2 xx'(1 - v^2/c^2) \quad \leadsto \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Die Transformationsgleichung für die Zeiten bekommt man durch durch Einsetzen von $x' = ct'$ und $t = x/c$ in (LA):

$$ct' = \gamma(ct - vx/c)$$

3.11 Verallgemeinerung auf drei Dimensionen

Nach wie vor: Koordinaten-Systeme fallen zum Zeit-Punkt $t = 0$ zusammen. v = Geschwindigkeit von S' in S entlang der x-Achse. Ansatz:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= \alpha\, y \\ z' &= \alpha\, z \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{aligned}$$

Der gleiche Faktor α in den mittleren Gleichungen beruht auf **I**: y und z sind völlig gleichberechtigt.
Die letzte Gleichung darf auf der rechten Seite keine y- oder z-Abhängigkeit enthalten, sonst würden aus der Sicht von S' Uhren, die z.B. bei $\pm y$ angeordnet sind, verschieden gehen, Widerspruch zu **I**.
Analog zu früher zeigt man α = gerade Funktion von v. Aus der Reziprozität folgt dann $\alpha^2 = 1$. Stetigkeit bei $v = 0$ verlangt

$\alpha = 1$.

3.12 LT bei beliebiger Richtung der Relativgeschwindigkeit

Zerlege die Ortsvektoren in beiden Systemen in Anteile parallel und senkrecht zur Relativgeschwindigkeit der Systeme:

$$\begin{aligned}\vec{x}_{||} &= \tfrac{(\vec{x}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2} \\ \vec{x}_{\perp} &= \vec{x} - \tfrac{(\vec{x}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2}\end{aligned}$$

Analog für $\vec{x'}$. Die LT-Transformation lautet dann ($\vec{\beta} = \vec{v}/c$):

$$\begin{aligned}\vec{x}'_{||} &= \gamma\left(\vec{x}_{||} - \vec{\beta}ct\right) \\ \vec{x}'_{\perp} &= \vec{x}_{\perp} \\ ct' &= \gamma\left(ct - \vec{\beta}\cdot\vec{x}_{||}\right)\end{aligned}$$