2 Spezielle Relativitätstheorie in Bildern

(frei nach L.P. Staunton, H. van Dam, Am. J. Phys. 48 (1980) 807)

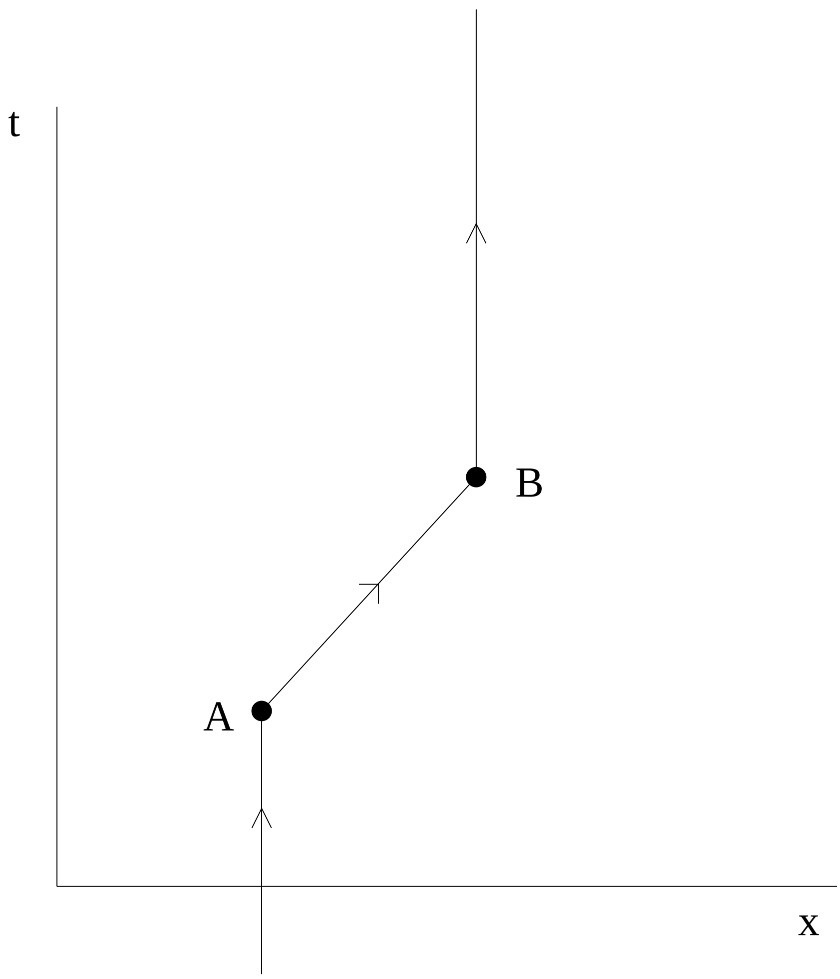

Bild 1: Raum-Zeit-Diagramm mit der *Weltlinie* eines Fußgängers. Dieser ruht zunächst, läuft dann mit konstanter Geschwindigkeit nach rechts und setzt sich wieder zur Ruhe. Punkte in einem solchen Diagramm nennt man *Ereignisse*.

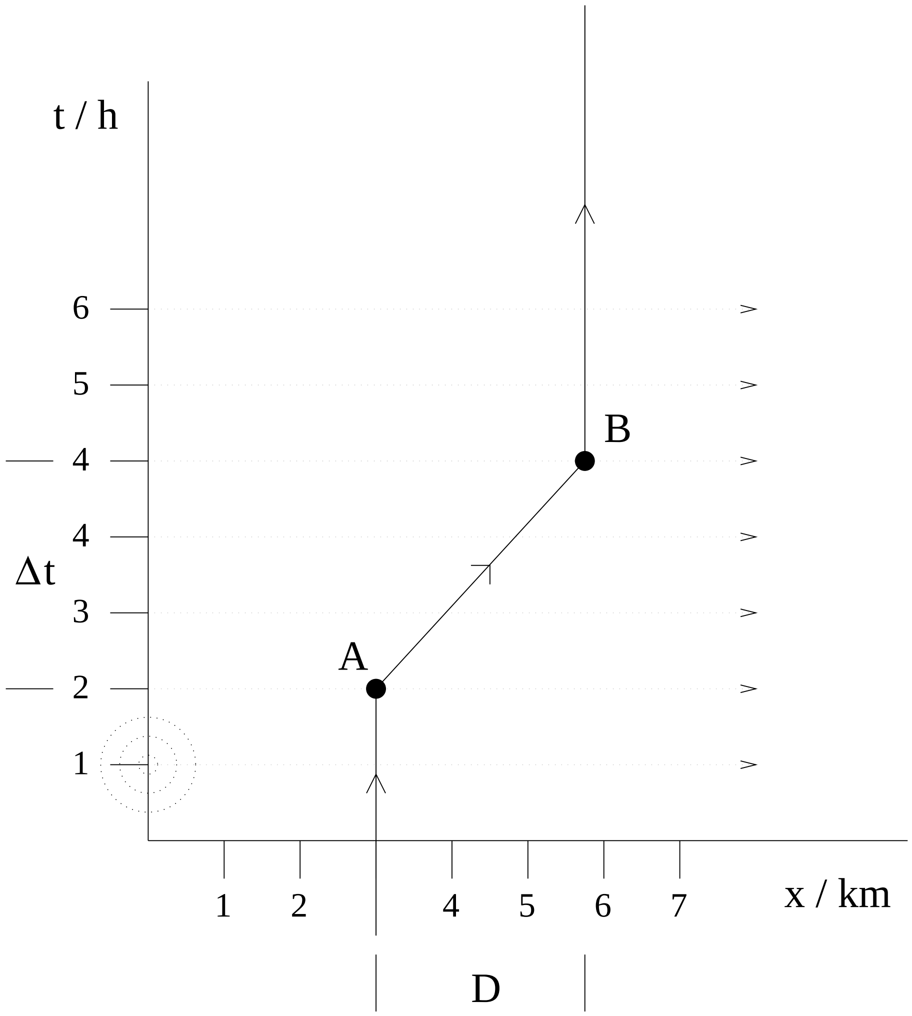

Bild 2. Raum-Zeit-Diagramm mit Einheiten in Stunden und Kilometern. Die gepunkteten Linien repräsentieren Radio-Signale von einer bei $x = 0$ ruhenden Uhr, die unser Spaziergänger empfangen kann. In der Zeit Δt legt er die Strecke D zurück. Seine Geschwindigkeit (Steigung der Weltlinie) ist daher $D/\Delta t$. Die endliche Lichtgeschwindigkeit bedeutet, daß die gepunkteten Linien eine endliche Steigung haben. Im Maßstab der Zeichnung ist dies nicht zu sehen.

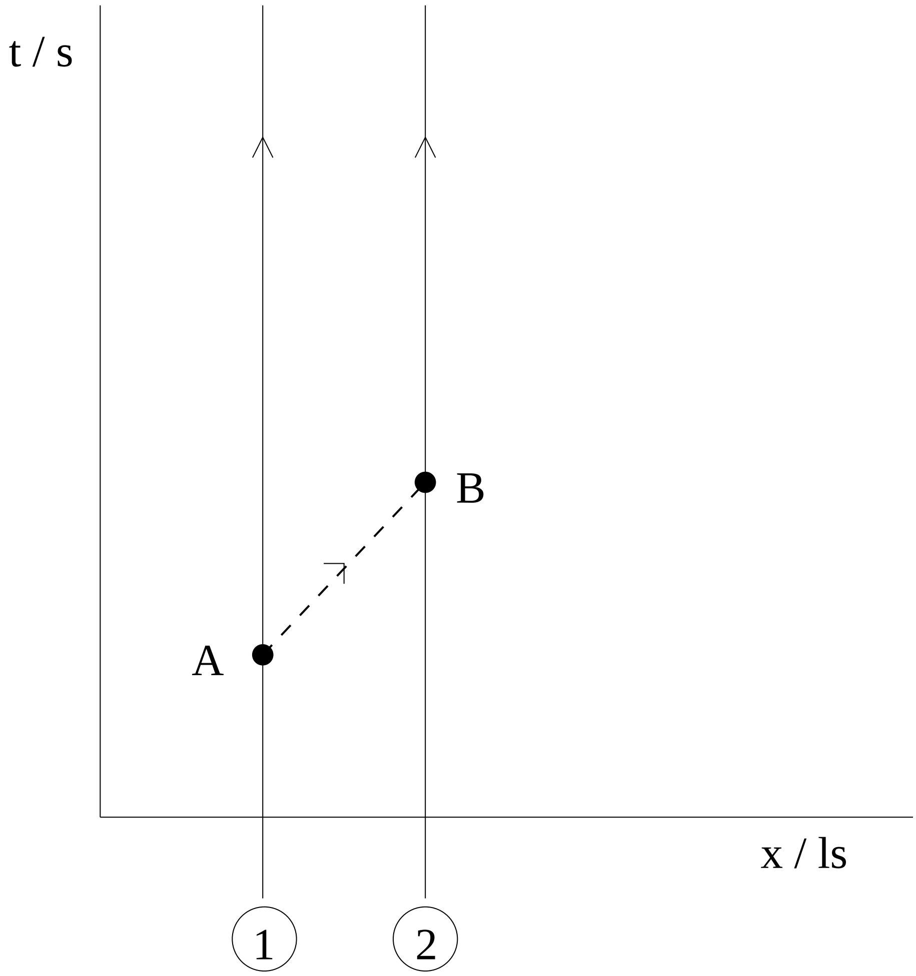

Bild 3. Raum-Zeit-Diagramm, mit Einheiten in Sekunden und Lichtsekunden. In diesen Einheiten haben Lichtsignale, repräsentiert durch gestrichelte Linien, eine Steigung von 45^o. Die Steigung der Weltlinien von Fußgängern in diesem Bild ist von 90^o nicht zu unterscheiden. Ereignis A: Beobachter 1 sendet einen Lichtblitz nach rechts. Ereignis B: Beobachter 2 empfängt den Lichtblitz. Beide Beobachter ruhen im Koordinatensystem (x,t).

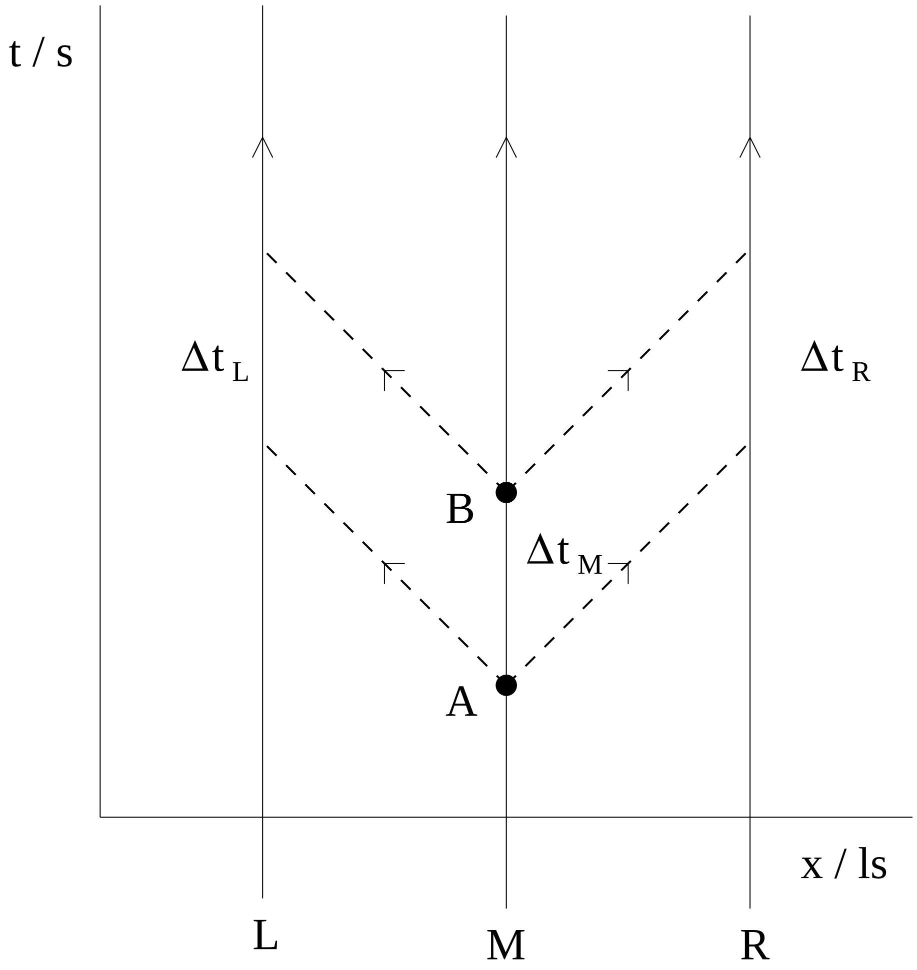

Bild 5. Raum-Zeit-Diagramm mit drei stationären Beobachtern L (links), M (Mitte) und R (rechts). M sendet im Abstand Δt_M Lichtblitze aus, gleichzeitig nach rechts und nach links (Ereignisse A und B). L und R registrieren die Blitze zeitverzögert. Das Zeitintervall zwischen erstem und zweitem Blitz ist jedoch für alle drei Beobachter gleich groß: $\Delta t_L = \Delta t_R = \Delta t_M$.

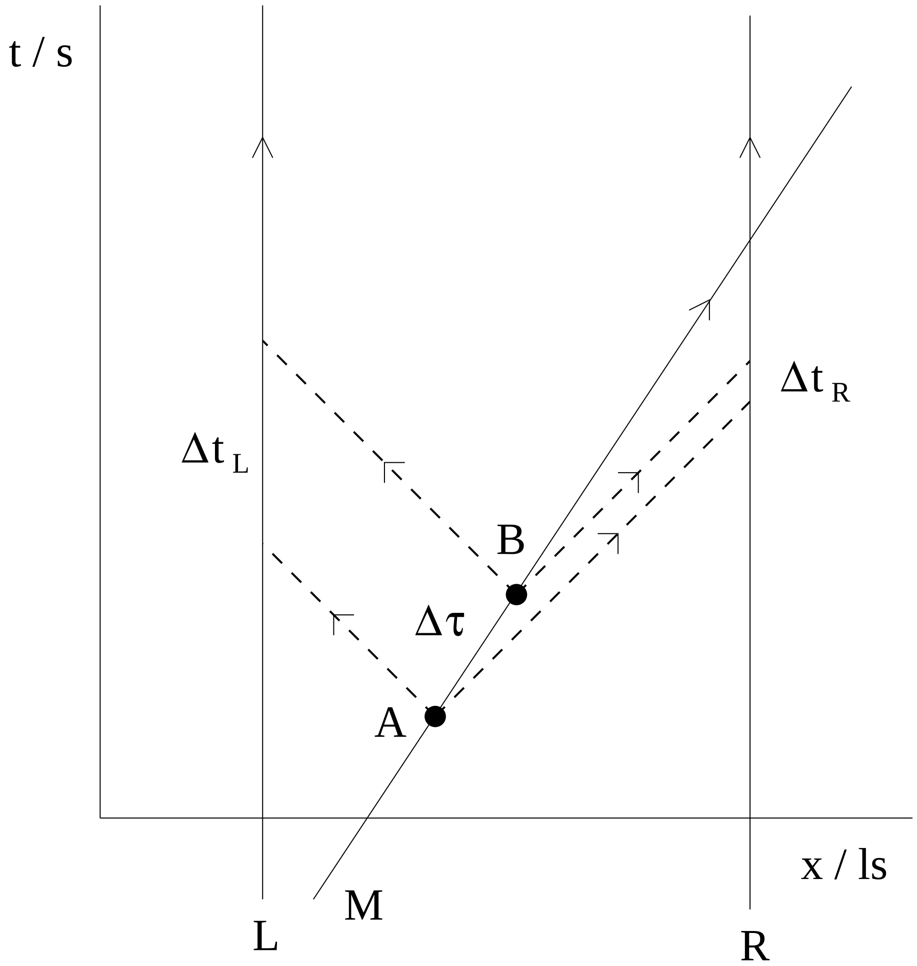

Bild 5. Raum-Zeit-Diagramm mit zwei stationären Beobachtern L, R und einem Beobachter M in schneller Bewegung. Mit zeitlichem Abstand $\Delta\tau$ (gemessen auf seiner *eigenen* Uhr) sendet M Lichtblitze aus. Die Tatsache, daß sich die Lichtsignale im Raum-Zeit-Diagramm nach wie vor auf Geraden mit Steigung 45^o ausbreiten, unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters M relativ zu L und R, ist das *Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit*. Der zeitliche Abstand zwischen den Blitzen ist jetzt für R kleiner, für L größer als für M: $\Delta t_R < \Delta\tau < \Delta t_L$. Das *Eigenzeitintervall* $\Delta\tau$ ist gegeben durch $\Delta\tau = \sqrt{\Delta t_L \cdot \Delta t_R}$.

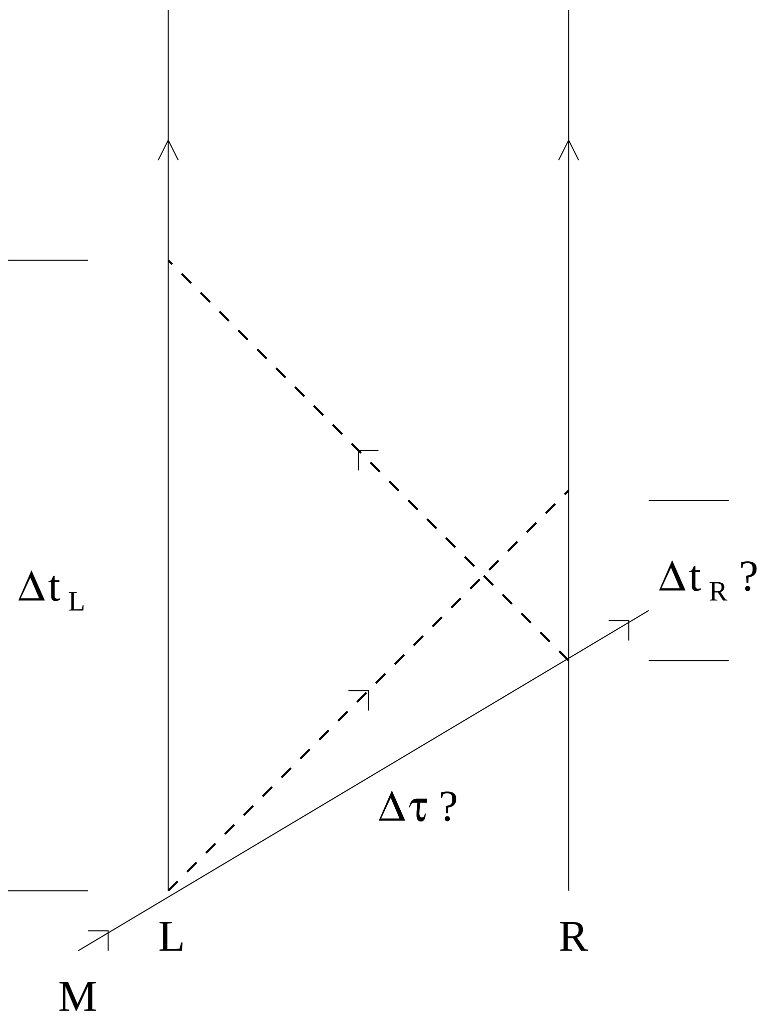

Bild 6. Hypothetisches Raum-Zeit-Diagramm eines Trips mit Überlichtgeschwindigkeit. M kommt auf seinem Trip bei dem ruhenden L vorbei. Dieser meldet dieses Ereignis an R durch Absenden eines Lichtblitzes nach rechts. Ebenso quittiert R das Vorbeifliegen von M durch einen Lichtblitz nach links. Diesen Blitz registriert L nach der Zeit Δt_L. Nichts ist ungewöhnlich. R hingegen sieht M an sich vorbeifliegen, bevor er ihn bei L vorbeikommen sieht. Dies geht nicht an. Das Eigenzeitintervall für M wäre übrigens rein imaginär!

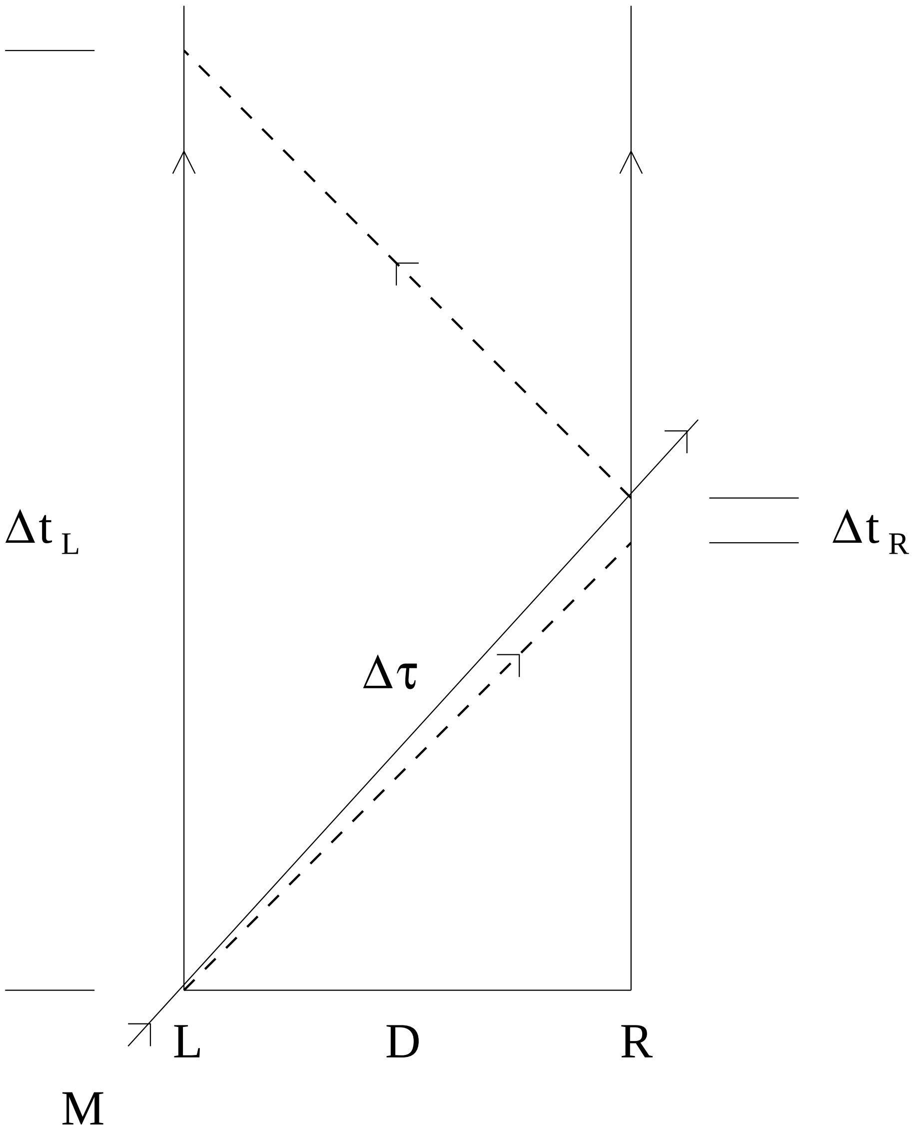

Bild 7. Raum-Zeit-Diagramm für einen Trip mit fast Lichtgeschwindigkeit. Der Lichtblitz braucht die Zeit D/c, um von von L nach R zu gelangen. Daher gilt $\Delta t_L = 2D/c + \Delta t_R$. Beispiel: $D = 7.5$ ls, $\Delta t_R = 1$ s. Daher $\Delta t_L = 16$ s. Auf der Uhr von M hingegen dauert die Reise von L nach M nur $\Delta\tau = \sqrt{\Delta t_L \cdot \Delta t_R} = 4$ s.

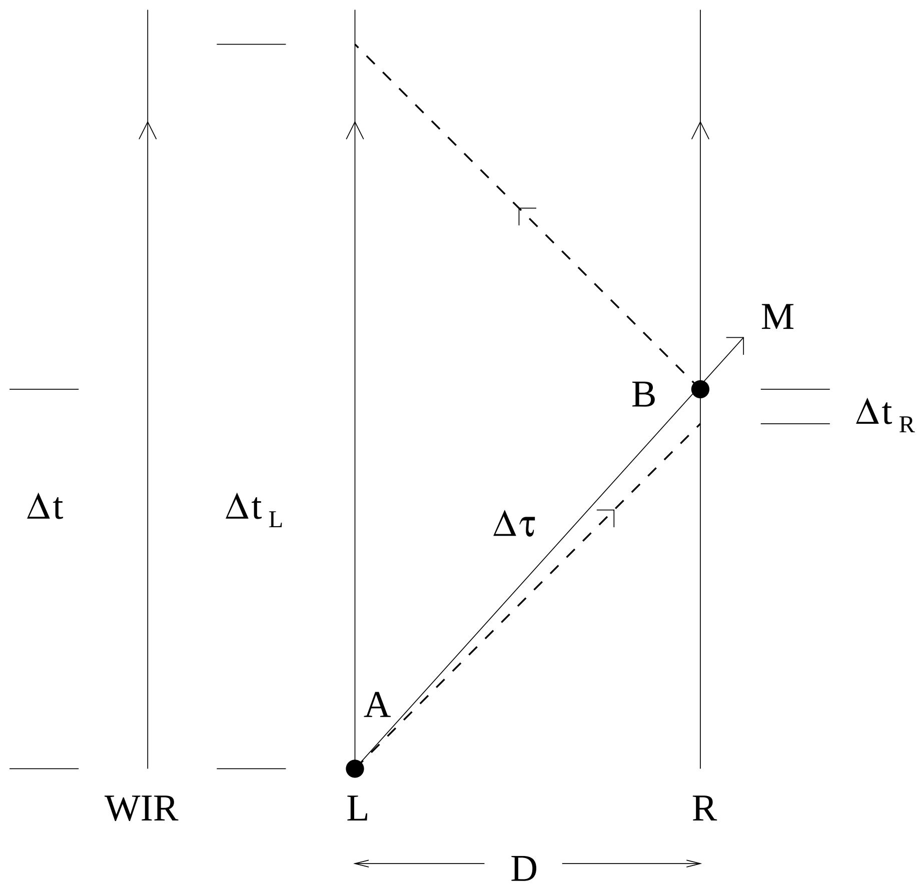

Bild 8. Trip-Zeit (vom Standpunkt WIR) versus Δt_L, Δt_R und Eigenzeitintervall $\Delta\tau$. WIR, L und R ruhen relativ zueinander. Zunächst synchronisieren wir unsere Uhren. Etwas später (Ereignis A) kommt M auf seiner schnellen Reise bei L vorbei. Dieser notiert seinen Uhrenstand. Das gleiche tut R beim Vorbeikommen von M. Die Differenz dieser beiden Zeiten ist die WIR-Zeit Δt. Später fragen wir M, wie lange er (nach seiner Uhr) für den Trip von L nach R gebraucht hat. Seine Antwort lautet $\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

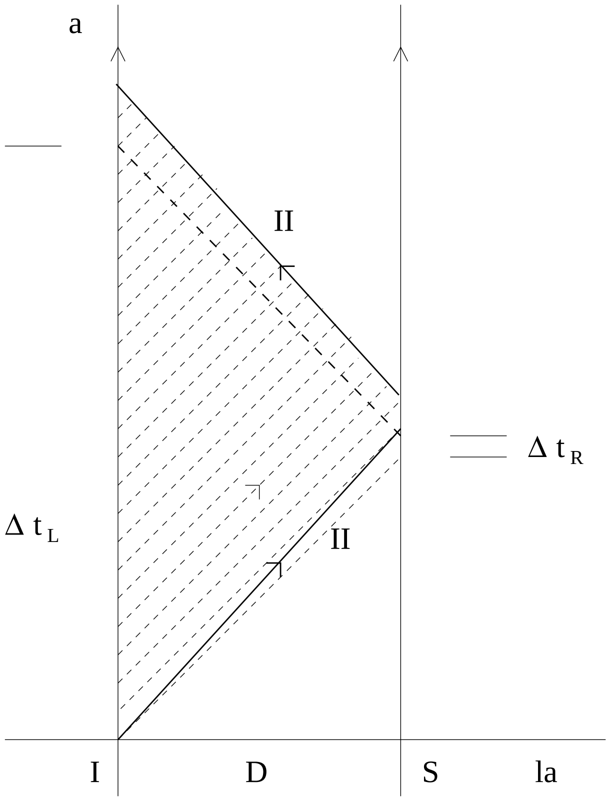

Bild 9. Graphische Darstellung des Zwillingsparadoxons. Zwilling II reist mit hoher Geschwindigkeit zum Sternsystem S. Der zurückbleibende Zwilling I schickt jährliche Geburtstagsgrüße per Funk (dünne gestrichelte Linien). II sendet lediglich eine Ankunftsbestätigung (dicke gestrichelte Linie). Ein Einwohner auf S konstatiert ein Zeitintervall $\Delta t_R = 1a$ zwischen Aufbruch und Ankunft von II auf S. L erhält allerdings erst nach $\Delta t_L = 21$ a Kunde von der sicheren Ankunft. Nach einem Jahr bricht II wieder zur Erde auf. Die Rückreise dauert aus der Sicht von I ein Jahr, so daß er II nach 23 Erdenjahren wieder begrüßt. Die verstrichene Eigenzeit für Zwilling II ist nur $2\sqrt{\Delta t_L\,\Delta t_R} + 1$ a $= 10.2$ a. Ein Paradoxon entsteht, wenn man fälschlicherweise annimmt, die Zwillinge seien gleichberechtigt. Zwar ist die Relativbewegung symmetrisch. II erfährt jedoch viermal heftige Beschleunigungen, während I die ganze Zeit in einem “Inertialsystem” ruht.

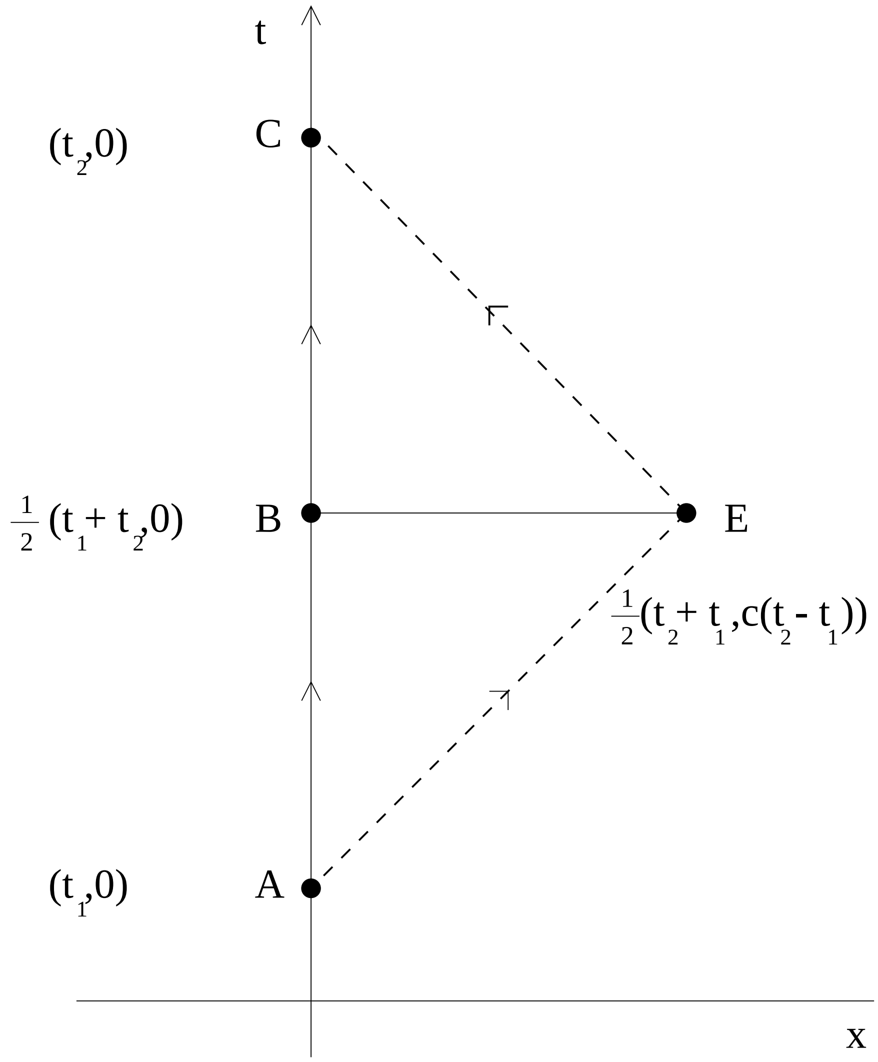

Bild 10. "Konstruktion" eines Raum-Zeit-Diagramms mit Uhr und Radar. Ein Beobachter O bestimmt die Koordinaten eines Ereignisses E, indem er die Zeit zwischen Aussenden und Empfang eines bei E reflektierten Radarsignals mißt. Aus einfachen Symmetrieüberlegungen folgt dann, daß E die Raum-Zeit-Koordinaten $\frac{1}{2}(t_2 + t_1, c(t_2 - t_1))$ hat.

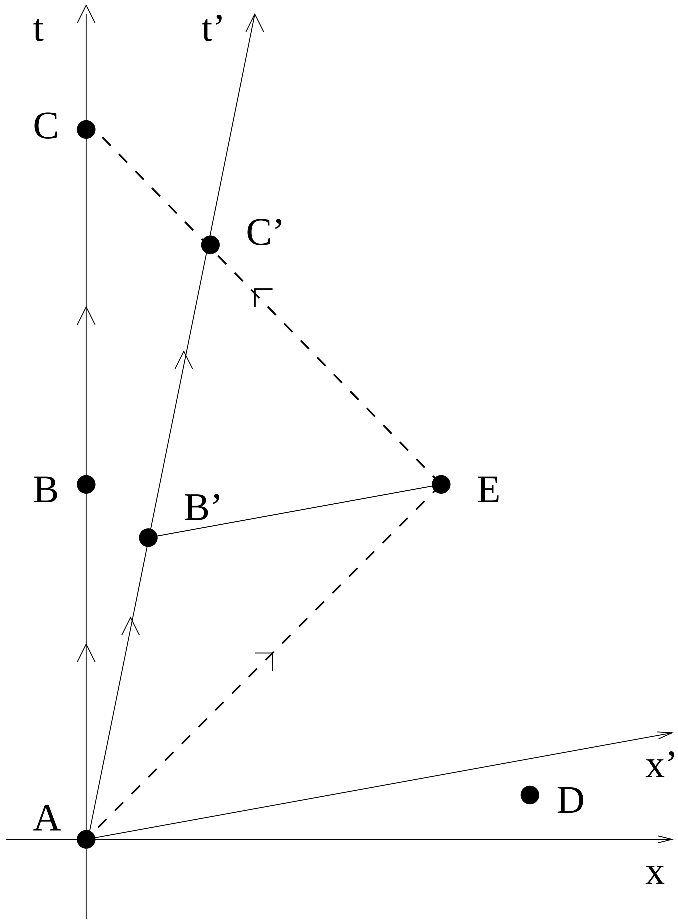

Bild 11. Raum-Zeit-Achsen eines bewegten Beobachters O', gezeichnet im ursprünglichen Koordinatensystem von O. O' benutzt ebenso wie O Radar und eine mitgeführte Uhr, um die Ereignisse zu "katalogisieren". Die Weltlinie von O' im System von O ist die t'-Achse. Beide schicken bei A ein Radarsignal aus. Die Echos erhalten sie bei C bzw. bei C'. Für O' ist das Ereignis B', auf halbem "Wege zu C", gleichzeitig mit E. Die Gerade B'E ist parallel zur x'-Achse. Gleichzeitigkeit ist relativ: Für O geschieht B' vor E, für O' sind B' und E gleichzeitig. Ebenso geschieht aus Sicht von O' B zeitlich nach E, während diese beiden Ereignisse für O gleichzeitig sind. Beim Ereignispaar A und D hängt sogar die zeitliche Reihenfolge vom Beobachter ab: Für O folgt D auf A, während für O' D dem Ereignis A vorausgeht.

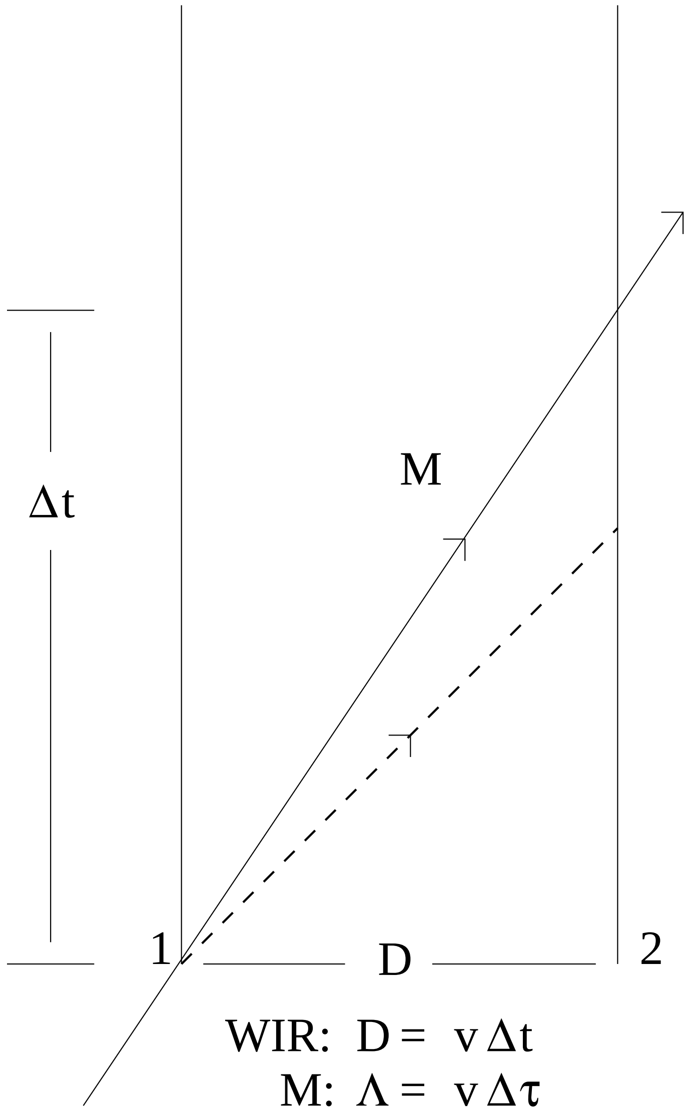

Bild 12. Messung des räumlichen Abstands zwischen zwei Objekten 1 und 2. In unserem Koordinatensystem hat der Beobachter M die Geschwindigkeit v. Er braucht die Zeit Δt, um von 1 nach 2 zu gelangen. Wir konstatieren daher $D = v\Delta t$. Für M selber hingegen verstreicht lediglich die Zeit $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Er wird daher zu dem Schluß kommen, daß der Abstand $\Lambda = D\sqrt{1 - v^2/c^2}$ beträgt. Dieses Phänomen nennt man Längenkontraktion.

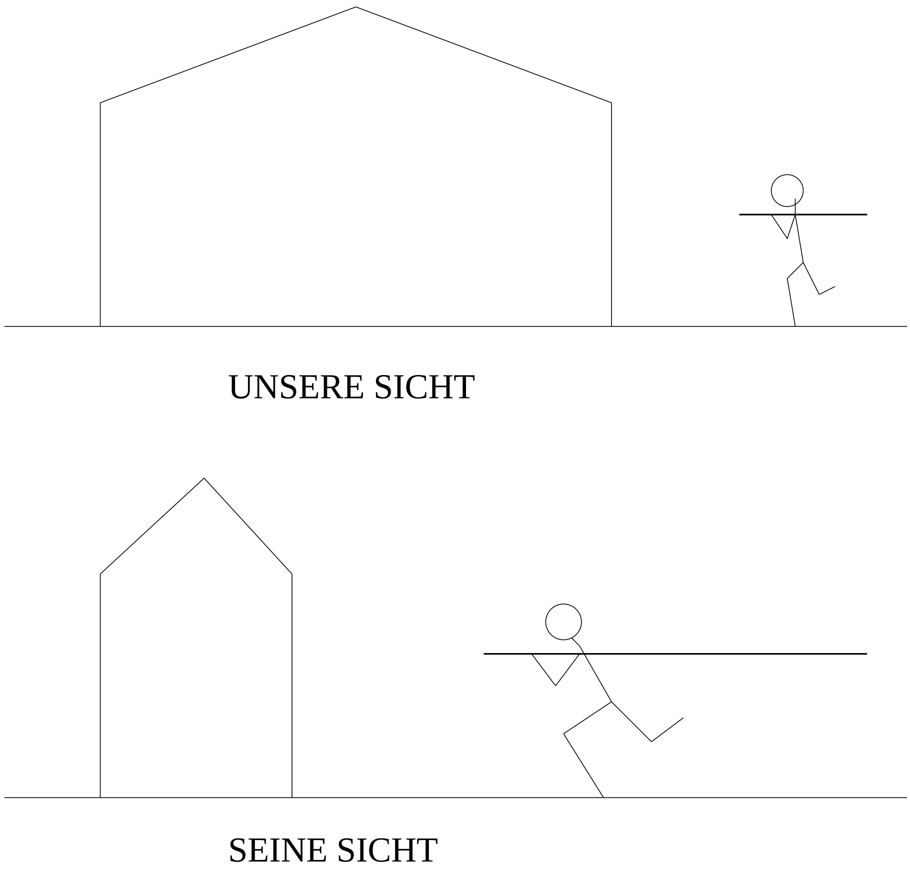

Bild 13. Experiment zum Paradox des Stabhochspringers: Ein Sportler erhält einen 5 m langen Stab. Wir bitten ihn, damit auf eine Scheune zuzulaufen, die 7.5 m tief ist, und deren Eingang geöffnet ist, während der Ausgang zunächst verschlossen bleibt. Wir haben die Absicht, nach Einlaufen des Sportlers in die Scheune zunächst den Eingang hinter ihm zu schließen und ihm dann den Ausgang zu öffnen. Bei kleinen Geschwindigkeiten des Sportlers gelingt das Experiment ohne weiteres. Was aber, wenn der Sportler mit 99.5 % der Lichtgeschwindigkeit läuft? Aus unserer Sicht geht alles gut: Läufer und Stab sind in Bewegungsrichtung auf 50 cm Länge verkürzt und passen gut in die Scheune. Der Läufer bekommt aber einen großen Schreck: In seiner Hand hält er einen 5 m langen Stab, während er eine Scheune auf sich zurasen sieht, die lediglich eine Tiefe von 75 cm hat. Er sieht sein Ende gekommen.

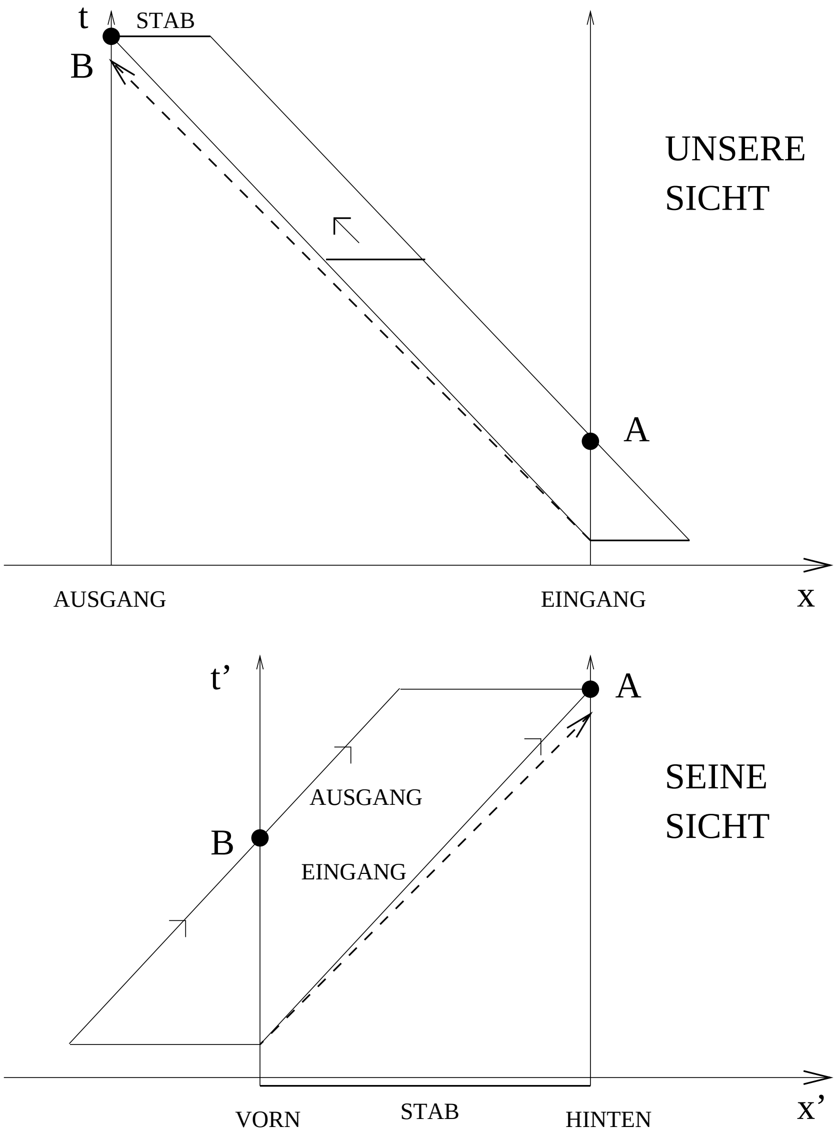

Bild 14. Raum-Zeit-Diagramme für die zeitliche Reihenfolge zweier Ereignisse. A: der Eingang wird hinter dem Stab geschlossen. B: der Ausgang wird vor der Spitze des Stabes geöffnet. Oberes Bild: A ist zeitlich vor B, so daß der Stab für eine gewisse Zeit in der Scheune eingeschlossen ist. Unteres Bild: Aus der Sicht des Sportlers ruht der Stab und die Tore bewegen sich. Die Weltlinien von Eingang und Ausgang sind eingezeichnet. Offenbar findet in diesen Koordinaten die Öffnung der Hintertür (B) vor dem Schließen des Eingangs (A) statt. Alles geht gut.

NR zu Abbildung 5: Bestimmung von $\Delta\tau(\Delta t_L, \Delta t_R)$

$\Delta\tau = T(\Delta t_L, \Delta t_R)$

Forderungen:

Spezialfall $v = 0$ (Abb. 4): $T(\Delta t, \Delta t) = \Delta t$

Homogenität: $T(s\Delta t_L, s\Delta t_R) = sT(\Delta t_L, \Delta t_R)$

R-L-Symmetrie in Abb. 5: $T(\Delta t_L, \Delta t_R) = T(\Delta t_R, \Delta t_L)$

Es gibt nur zwei *einfache* Funktionen, mit den geforderten Eigenschaften:

$$\begin{aligned} T(\Delta t_L, \Delta t_R) &= \tfrac{1}{2}(\Delta t_L + \Delta t_R) && \text{NEWTON} \\ T(\Delta t_L, \Delta t_R) &= \sqrt{\Delta t_L\, \Delta t_R} && \text{EINSTEIN} \end{aligned}$$

Anwendung der NEWTON-Regel erlaubt die Einführung einer absoluten Zeit und ist im Widerspruch zum Experiment (siehe später).

NR zu Abbildung 8: Bestimmung von $\Delta\tau(v)$

Aus der Geometrie der Abbildung:

$$\Delta t_L = \Delta t + D/c$$
$$\Delta t_R = \Delta t - D/c$$

Einsetzen in die EINSTEIN-Formel für $\Delta\tau$:

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \sqrt{\Delta t_L\,\Delta t_R}\\ &= \sqrt{(\Delta t + D/c)\,(\Delta t - D/c)}\\ &= \sqrt{(\Delta t)^2 - D^2/c^2}\\ &= \Delta t\,\sqrt{1 - v^2/c^2}\end{aligned}$$

Dabei haben wir $D = v\Delta t$ benutzt.