14 Kosmologie

14.1 Robertson-Walker-Metrik

Zur Geschichte:

- A. Einstein, 1917
  "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie". Statisches, *endliches Universum* $\leftrightarrow$ Kosmologische Konstante Λ: $G_{ik} = -\kappa\, T_{ik} - \Lambda\, g_{ik}$
- E. Hubble, 1929
  Rotverschiebung $\rightsquigarrow$ Expansion des Weltalls
- A. Friedmann, 1922
  Kosmologische Modelle mit Expansion

<u>Kosmologisches Prinzip:</u>

- räumliche Homogenität
- räumliche Isotropie

$\rightsquigarrow$ Es gibt eine universelle Zeit t

$$ds^2 = dt^2 - g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

Materie ruht bezüglich dieser "mitbewegten Koordinaten".

Gesucht: 3-dimensionaler Raum konstanter Krümmung

Modell:

1) positive Krümmung: 3-dimensionale Hyperkugel im $\mathbf{R}^4$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \xi^2 = a^2$$

Eliminiere ξ vermöge

$$\xi = \left(a^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2\right)^{1/2}$$

Polarkoordinaten für (x^1, x^2, x^3): $x^1 = r\,\sin\theta\,\cos\phi$ etc.

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^1)^2 + (dx^1)^2 + (d\xi)^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2\,d\Omega^2$$

$0 \leq r < a$, Krümmung: $R = 1/a^2$.
Singularität bei $r = a$: Koordinatensingularität

2) negative Krümmung: Hyperboloid

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - \xi^2 = -a^2, \qquad \xi > 0$$

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{a^2}} + r^2\, d\Omega^2$$

$0 \leq r < \infty$, Krümmung: $R = -1/a^2$.

<u>Robertson-Walker-Metrik:</u>

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{1 - k\, r^2/a^2(t)} - r^2\, d\Omega^2$$

Robertson, Walker (1936): Obige Metrik ist die allgemeinste Metrik, die dem kosmologischen Prinzip genügt.

$a(t) =$ Weltradius

$\underline{k=1}$ *geschlossener Raum*, positive Krümmung

$$V = 2 \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{r^2\, \sin\theta}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} = 2\,\pi^2\, a^3$$

Umfang eines Kreises: $dr = d\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $dl = r\, d\phi$

$$U(r) = 2\,\pi\, r$$

Abstand vom Nullpunkt:

$$d(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - r'^2/a^2}} = a\, \arcsin\frac{r}{a} \;\geq\; \frac{U}{2\pi}$$

Krümmung (vergl. Kapitel 1): $r(d) = a\ \sin(d/a)$,

$$R = \frac{3}{\pi} \lim_{d \to 0} \left(\frac{2\pi\, d - 2\pi r(d)}{d^3} \right) = \frac{1}{a^2}$$

<u>$k = -1$:</u> *offener Raum*, negative Krümmung

$$\begin{aligned} V &= \infty \\ U(r) &= 2\,\pi\,r \\ d(r) &= a \operatorname{Arsinh} \tfrac{r}{a} < \tfrac{U}{2\pi} \end{aligned}$$

<u>$k = 0$:</u> *flacher Raum*

<u>Einstein-Tensor</u>:

$$\begin{aligned} G^0{}_0 &= -3\, \tfrac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \\ G^1{}_1 &= G^2{}_2 = G^3{}_3 = -2\, \tfrac{\ddot{a}}{a} - \tfrac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \end{aligned}$$

$\dot{()} = d/dt\,()$. Die nicht aufgeführten Komponenten verschwinden.

<u>Einsteingleichungen:</u>

$$G_{ik} = -\kappa\, T_{ik}$$

Modell für die Materie: ideale Flüssigkeit (keine Reibung).

Energie-Impulstensor im Ruhsystem der Flüssigkeit:

$$T_{ik} = \mathrm{diag}(\rho, p, p, p)$$

ρ, p sind Dichte und Druck. In einem beliebigen KS:

$$T_{ik} = (\rho + p)\, u_i\, u_k - p\, g_{ik}$$

Resultierende Bewegungsgleichung für den Radius:

$$2\,\tfrac{\ddot{a}}{a} + \tfrac{\dot{a}^2+k}{a^2} \;=\; -\kappa\, p \qquad (A)$$

$$3\,\tfrac{\dot{a}^2+k}{a^2} \;=\; \kappa\, \rho \qquad (B)$$

Bilde $d/dt\,[(B)a^3] -\ 3\,a^2\,\dot{a}\,(A)$:

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p\,\frac{d}{dt}a^3 = 0 \qquad (A')$$

$(A'), (B)$ und die Zustandsgleichung zwischen ρ und p bestimmen $a = a(t)$.

14.2 Friedmann-Kosmos

Inkohärente Materie (Staub): $p = 0$

$(A') \quad \rightsquigarrow \quad \rho\, a^3(t) \equiv M = \text{const}$

in geschlossenen Universen: $M \sim$ Gesamtmasse

$(B) \quad \frac{\dot{a}^2+k}{a^2} = \frac{\kappa M}{3a^3} \quad \rightsquigarrow \quad \dot{a}^2 - \frac{\kappa M}{3a} + k = 0$

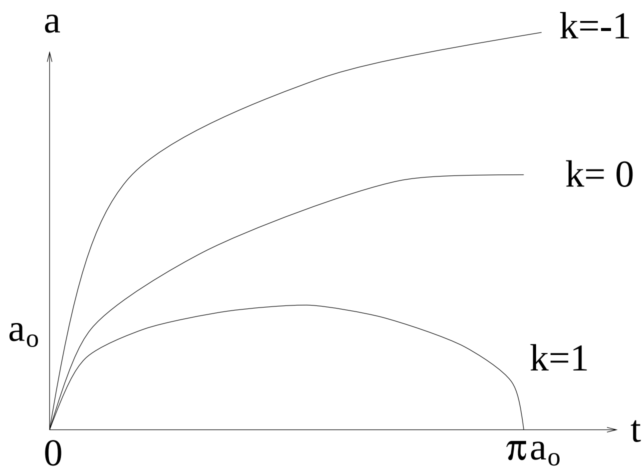
Friedmann-Gleichung

=

Bewegungsgleichung für Fall im Potential $1/a$, mit Energie $-k$.

Lösungen ($a_0 = \kappa M/3$):

$$\begin{aligned}
k = 1 \ &: \ t = \tfrac{a_0}{2} \arccos\left(1 - \tfrac{2a}{a_0}\right) - \sqrt{a_0\, a - a^2} \\
k = -1 \ &: \ t = -\tfrac{a_0}{2} \mathrm{Arcosh}\left(1 + \tfrac{2a}{a_0}\right) + \sqrt{a_0\, a - a^2} \\
k = 0 \ &: \ t = \tfrac{2}{3}\, a_0 \left(\tfrac{a}{a_0}\right)^{3/2}
\end{aligned}$$



- Bewegungsablauf durch die Krümmung bestimmt
- Singularität bei $t = 0$. Allerdings: Für frühe Zeiten gilt die Annahme koährenter Materie *nicht*. Man kann aber zeigen, daß Lösungen der EG eine Singularität zu frühen Zeiten haben müssen, wenn das Universum sich jetzt ausdehnt (Hawking, Penrose).

Strahlungsdominiertes Universum: $p = \frac{1}{3}\rho$.

$$\rho a^4 \equiv A = \text{const}$$

$$\dot{a}^2 - \frac{\kappa A}{3\, a^2} + k = 0$$

$$a^2 = \left(\frac{\kappa A}{3}\right)^{1/2} t - k\, t^2$$

"Heutige" Verhältnisse: $\rho_{\text{Strahlung}} << \rho_{\text{Materie}}$.

Annahme: Friedmann Kosmos mit $p = 0$ gute Beschreibung.

14.3 Beobachtende Kosmologie

Lichtausbreitung:

<u>Quelle</u>		<u>Beobachter</u>
$r = r_1$		$r = 0$
t_1	$\bullet \rightsquigarrow$	$\bullet\ t_0$
$t_1 + \Delta t_1$	$\bullet \rightsquigarrow$	$\bullet\ t_0 + \Delta t_0$

$$ds = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad dt = -a(t)\,\tfrac{dr'}{\sqrt{1-kr'^2}}\,, \qquad r' = r/a$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1/a} \frac{dr'}{\sqrt{1-kr'^2}} = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t_1}{a(t_1)}$$

Anwendung auf Frequenzverschiebung:

$\nu = \frac{2\pi}{\Delta t}$: $\quad \nu_0 \, a(t_0) = \nu_1 \, a(t_1)$

In der Expansionsphase ergibt sich eine *Rotverschiebung*:

$$z \equiv \frac{\nu_1 - \nu_0}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 > 0$$

Taylor-Entwicklung:

$$a(t_1) = a(t_0) \left(1 + H \, (t_1 - t_0) - \frac{q}{2} \, H^2 \, (t_1 - t_0)^2 + \ldots \right)$$

mit

$$H = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \quad \text{Hubble-Zahl}$$

und

$$q = -\frac{\ddot{a}(t_0) \, a(t_0)}{\dot{a}(t_0)^2} \quad \text{Verzögerungsparameter}$$

$$z = H \, (t_0 - t_1) + \left(1 + \frac{q}{2}\right) H^2 \, (t_0 - t_1)^2 + \ldots$$

Lichtlaufzeit $t_0 - t_1$ $\quad \rightsquigarrow \quad$ aktuelle Entfernung $d(t_0)$

$$d = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - k\,\frac{r^2}{a(t_0)^2}}} = a(t_0) \int_{r'_0}^{r'_1} \frac{dr'}{\sqrt{1 - k\,r'^2}}$$

Wegen

$$dt = -a(t)\,\frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}$$

gilt

$$\begin{aligned}
d(t_0) &= a(t_0) \textstyle\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \\
&= a(t_0) \textstyle\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t_0)(1+H(t-t_0)+\ldots)} \\
&= \textstyle\int_{t_1}^{t_0} dt\,(1 - H(t-t_0) + \ldots) \\
&= (t_0 - t_1) + \frac{H}{2}\,(t_0 - t_1)^2 + \ldots
\end{aligned}$$

Resultat zu zweiter Ordnung:

$$z = H\,d + \frac{1}{2}(q+1)H^2\,d^2 + \ldots$$

Hubblesches Gesetz (1929):

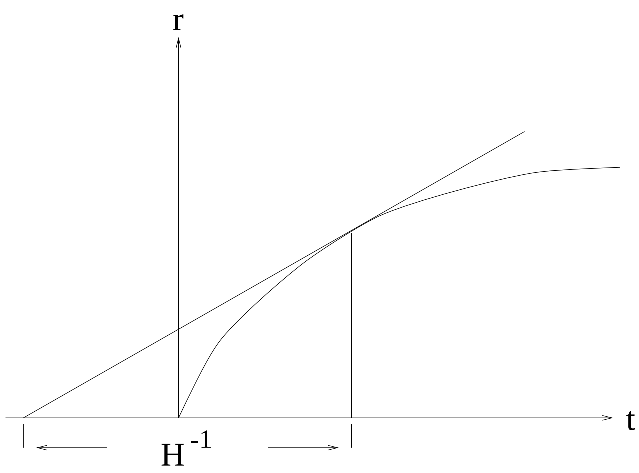
$$z \approx H\,d \quad \text{mit} \quad H > 0$$

Die (genaue) experimentelle Bestimmung von H ist schwierig:

$$
\begin{aligned}
H &= (1.8 \pm 0.2)\, 10^{-18}\, \mathrm{sec}^{-1} \quad \text{Sandage} \\
&= (3.2 \pm 0.3)\, 10^{-18}\, \mathrm{sec}^{-1} \quad \text{de Vaucoulers et al.}
\end{aligned}
$$

$q > 0$ nicht gut bekannt, $q = 1 \pm 0.4$

Zur Bedeutung von H:



$H^{-1} \approx 1.8 \cdot 10^9\, \mathrm{a} > t_0$

Zur Bedeutung von q: Setze Def. von H, q in (A), (B) ein für $t = t_0$:

$$
\begin{aligned}
6\,q\,H^2 &= \kappa\,\rho \\
H^2\,(2\,q-1) &= \tfrac{k}{a(t_0)^2}
\end{aligned}
$$

2. Gleichung erfordert

$$
\begin{aligned}
k &= 1\,, \qquad \text{falls} \;\; q > \tfrac{1}{2} \\
k &= 0\,, \qquad \text{falls} \;\; q = \tfrac{1}{2} \\
k &= -1\,, \qquad \text{falls} \;\; q < \tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

1. Gleichung:

$$
q > \frac{1}{2} \quad \text{falls} \quad \rho > \rho_c = \frac{3\,H^2}{\kappa} \approx 5 \cdot 10^{-27}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}
$$

geschätzte Dichten:
Galaxien: $\rho \approx 3 \cdot 10^{-28}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
Strahlung: $\rho \approx 4.5 \cdot 10^{-31}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

$\rightsquigarrow$ fehlende Materie?
$\rightsquigarrow$ Universum offen oder geschlossen?

Für $q = 1$ und $H^{-1} = 18 \cdot 10^9$ a ist $t_0 = 11 \cdot 10^9$ a.

14.4 Frühes Universum

$a << a_0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Strahlung dominiert.

$\rho \sim T^4$ (Stefan-Boltzmann) $\quad \rightsquigarrow \quad T \sim \frac{1}{a}$

Kosmische Hintergrundstrahlung: $T = 2.7^o$ K

Epochen:

t	a[m]	T[^{o}K]	ρ[kg/m^3]	Beschreibung
10^{10}a	10^{26}	2.7	10^{-27}	Materie dominiert
$4 \cdot 10^5$a	10^{23}	3000	10^{-18}	Entkoppelung der Strahlung Strahlung dominiert
$2 \cdot 10^3$sec	10^{18}	$3 \cdot 10^8$	10	Kernreaktionen Bildung leichter Elemente
2sec	$3 \cdot 10^{16}$	10^{10}	10^{11}	Leptonenpaare in der thermischen Strahlung
10^{-4}sec	$3 \cdot 10^{14}$	10^{12}	10^{19}	Baryonen und Antibaryonen in der thermischen Strahlung