13 Schwarze Löcher

13.1 Der Schwarzschild-Horizont

SM singulär bei $r = 2\,M \equiv R_S$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\, d\Omega^2$$

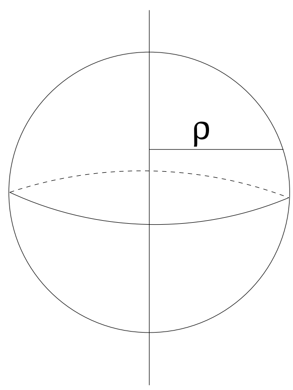
Planeten, Sterne: $R_S \ll R$

$R_{S,\odot} \approx 3$ km, $R_{S,\mathrm{Erde}} \approx 9$ mm

SM ist *Außenraumlösung*, im Innenraum andere Lösung.

Objekte mit $R < R_S$?

Singularität bei $R = R_S$ ist Koordinatensingularität, vergleiche



$$dl^2 = \frac{d\rho^2}{1-\rho^2} + \rho^2\, d\phi^2$$

$\rho = 1 \leftrightarrow$ Äquator

Riemann und seine Kontraktionen sind bei R_S *nicht* singulär.

Frei fallender Beobachter mit Drehimpuls 0:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{M}{r} = E$$

$$\frac{dr}{ds} = \pm\sqrt{2E + R_S/r}$$

Eigenzeit für Fall von $r_1 > R_S$ bis R_S:

$$s_1 = \int_{R_S}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{2E + R_S/r}} < \infty$$

Weiter bis zum Ende:

$$s_2 = \int_{0}^{R_S} \frac{dr}{\sqrt{2E + R_S/r}} < \infty$$

$dr/ds = 0$ bei $r = r_1 \quad \rightsquigarrow \quad E = -M/r_1$

$$s_1 + s_2 = \pi M \left(\frac{r_1}{R_S}\right)^{3/2} \approx 10^{-5} \frac{M}{M_\odot} \left(\frac{r_1}{R_S}\right)^{3/2} \text{sec}$$

Es passiert wohl nichts besonderes bei R_S!

Koordinatenzeit t = Zeit eines ruhenden Beobachters bei sehr großem r.

Zusammenhang zwischen t und s

$$\frac{dt}{ds}\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) = F$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{2E + R_S/r}\, F^{-1}\,(1 - R_S/r)$$

Das Integral

$$t_1 = F \int_{R_S}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{2E + R_S/r}\;(1 - R_S/r)}$$

ist unendlich. Ruhender Beobachter sieht das Objekt nie durch die Schwarzschild-Sphäre fallen!

Radiale Lichtstrahlen von r_0 nach $r_1 > r_0$:

$$0 = ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2$$

also

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)$$

Integration:

$$\Delta t = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{1 - R_S/r} = r^*(r_1) - r^*(r_0)$$

mit

$$r^*(r) = r + R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right)$$

Für $r_0 \to R_S$ geht $\Delta t \to \infty$. Der ruhende Beobachter sieht kein Licht durch die Kugelschale $r = R_S$ (Schwarzschild-Horizont) treten.

Rotverschiebung:

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \left(\frac{g_{00}|_1}{g_{00}|_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{1 - R_S/r_0}{1 - R_S/r_1}\right)^{1/2} \approx \sqrt{1 - R_S/r_0} \text{ für } \; r_1 >> R_S$$

Licht des hineinfallenden Objektes ist zunehmend rotverschoben
$\rightsquigarrow$ *Schwarzes Loch*

13.2 Kruskal-Koordinaten

Gesucht: KS, das bei $r = R_S$ nicht singulär wird. Antwort durch Kruskal (1960), Szekeres (1960).

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Phi(r)\, dt^2 - \Phi(r)^{-1}\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2 \\ &= \Phi(r)\left(dt^2 - dr^{*2}\right) - r^2\, d\Omega^2 \end{aligned}$$

mit

$$dr^* = \frac{dr}{\Phi(r)}$$

Für SM

$$r^*(r) = r + R_S\, \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right)$$

Radiale Lichtstrahlen genügen $dt = \pm dr^*$. Suche KT $(r^*, t) \to (u, v)$, so daß diese Eigenschaft erhalten ist, und zusätzlich keine Koordinatensingularitäten auftreten.

Neues Linienelement

$$ds^2 = f^2(u, v)\, \left(dv^2 - du^2\right) - r^2(u, v)\, d\Omega^2$$

Vergleich mit oben:

$$\begin{aligned} u &= h\,(r^* + t) + g\,(r^* - t) \\ v &= h\,(r^* + t) - g\,(r^* - t) \end{aligned}$$

wobei

$$f^2 = \frac{\Phi}{4\,g'\,h'}$$

Ansatz für h und g:

$$\begin{aligned} h\,(r^* + t) &= a\,e^{\gamma(r^*+t)} \\ g\,(r^* - t) &= b\,e^{\gamma(r^*-t)} \end{aligned}$$

$$f^2 = \frac{\Phi(r)\,e^{-2\gamma r^*}}{4\,a\,b\,\gamma^2}$$

muß positiv sein. Setze $\gamma = (2\,R_S)^{-1}$:

$$f^2 = (1 - R_S/r)\,e^{-r^*/2R_S}\,\frac{4\,M^2}{a\,b} = \frac{8M^3}{a\,b\,r}\,e^{-r/2R_S}$$

Koordinatentransformation also

$$
\begin{aligned}
u &= \sqrt{r/R_S - 1}\, e^{r/2R_S} \cosh(t/2R_S) \\
v &= \sqrt{r/R_S - 1}\, e^{r/2R_S} \sinh(t/2R_S)
\end{aligned}
$$

Linienelement in diesen Koordinaten:

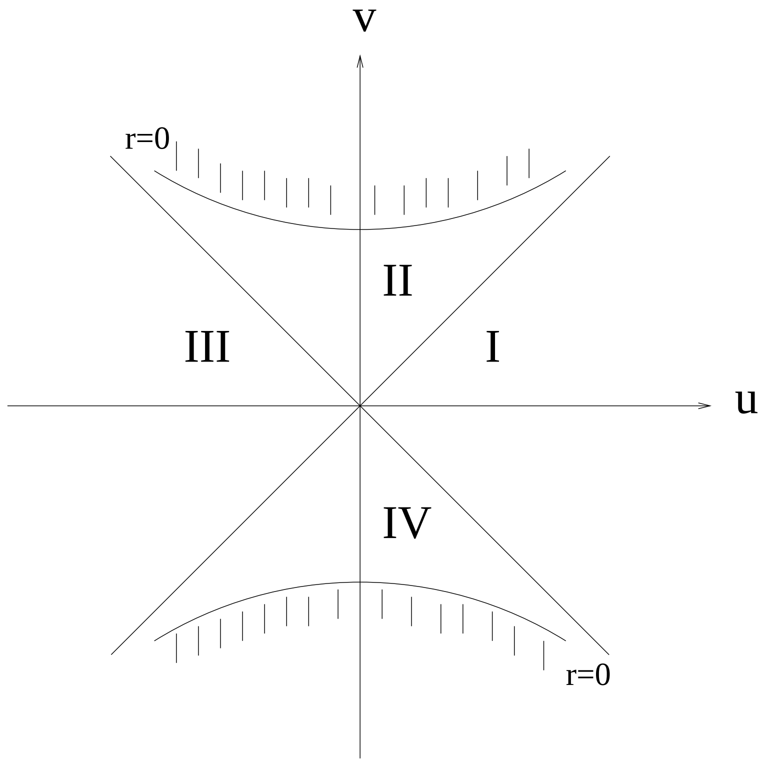
$$ds^2 = \frac{32M^3}{r}\, e^{-r/R_S} \left(dv^2 - du^2\right) - r^2\, d\Omega^2$$

In dieser Gleichung ist r als Funktion von u, v aufzufassen vermöge

$$(r/R_S - 1)\; e^{r/R_S} = u^2 - v^2$$

Trafo zunächst gültig für $r > R_S$, d.h. $|u| > |v|$. Ausdehnung auf größeren Bereich möglich, ohne daß Singularität auftritt. Einschränkung an u, v durch Forderung $r > 0$.

$$r = 0 \quad \leftrightarrow \quad v^2 - u^2 = 1$$



Für die maximale analytische Ausdehnung erforderliche erforderliche Modifikation der Transformationsformeln:

$$u, v = \epsilon_1 \sqrt{|r/R_S - 1|}\; e^{r/2R_S}\; \frac{1}{2}\left(e^{t/2R_S} \pm \epsilon_2\, e^{-t/2R_S}\right)$$

Vorzeichenzuordnung

Gebiet	ϵ_1	ϵ_2	r-Bereich
I	$+1$	$+1$	$r > R_S$
II	$+1$	-1	$r < R_S$
III	-1	$+1$	$r > R_S$
IV	-1	-1	$r < R_S$

Einzige verbliebene Singularität: $r = 0$. Diese ist physikalisch.

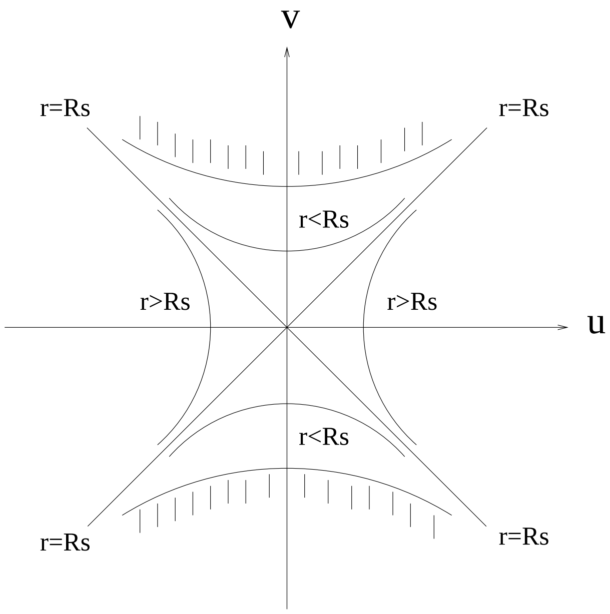
Umkehrformeln:

$$(r/R_S - 1)\ e^{r/R_S} = u^2 - v^2$$

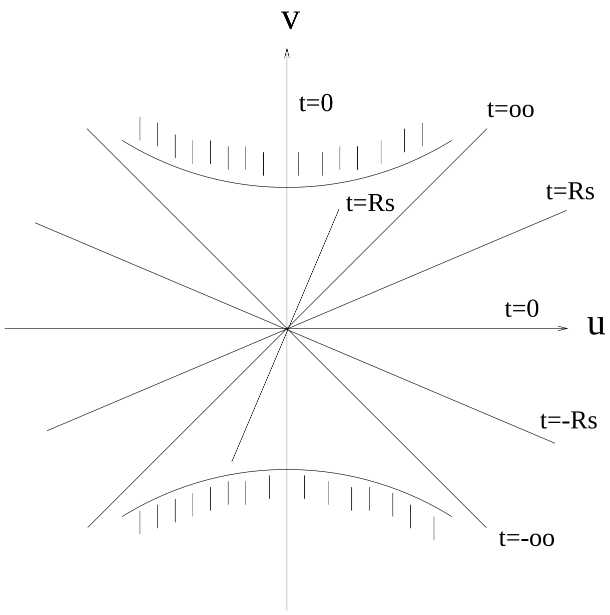
$$t/R_S = \ln\left(\left|\frac{u+v}{u-v}\right|\right)$$

Für jeden Wert von (r, t) gibt es zwei Werte (u, v).

Kurven für konstantes r (Hyperbeln):



Kurven für konstantes t (Geraden):



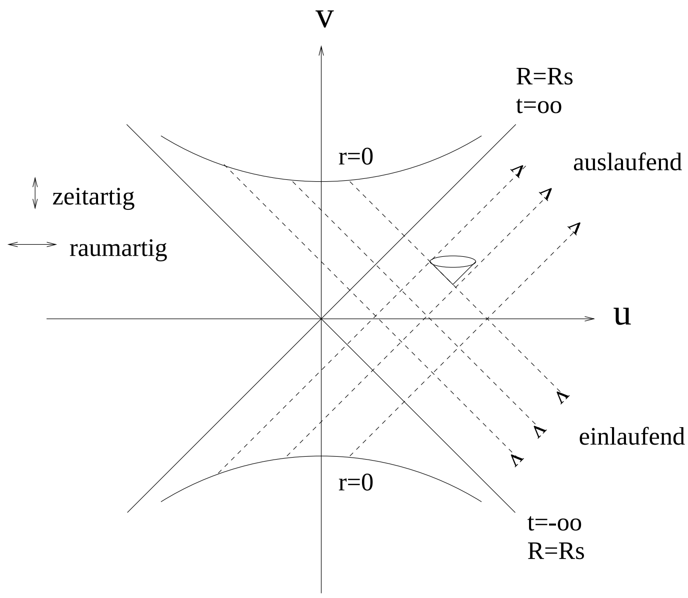
I: Außenraum der SM-Metrik

II: Innenraum der SM-Metrik

III und IV: isometrisch zu I,II: Verdoppelung

<u>Diskussion der Kausalstruktur:</u>

Radiale Lichtstrahlen, $ds^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \left|\frac{dv}{du}\right| = 1$



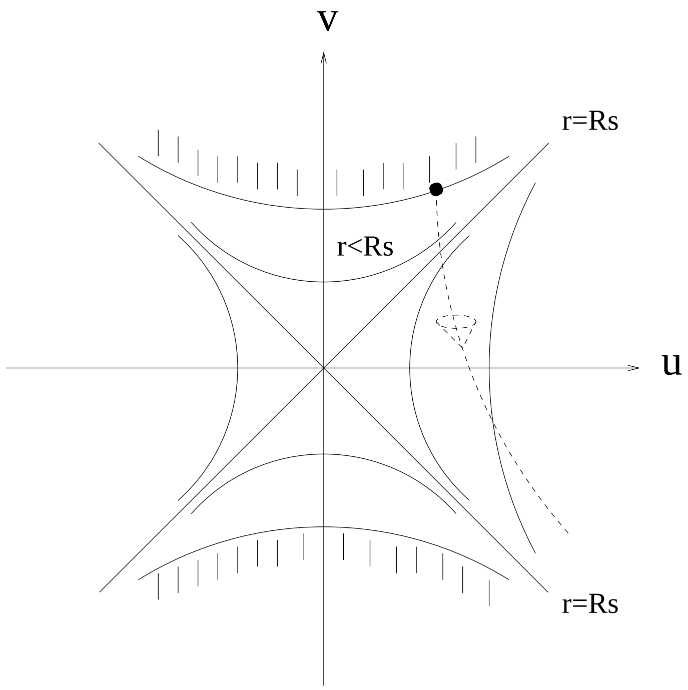
Für $r < R_S$ ist t eine raumartige und r eine zeitartige Koordinate.

- Kein Signal zwischen I und III
- Kein Signal von I nach IV
- Kein Signal von II nach I

Interpretation

- II: schwarzes Loch, alles kann rein, nichts raus
- IV: weißes Loch, nichts kann rein, alles kann raus

Massive Körper stürzen auf zeitartigen Geodäten in den Ursprung:



13.3 Gravitationskollaps

- Sind die Gebiete III und IV im Kosmos realisiert?
- Wie bilden sich Schwarze Löcher?

Zwei Möglichkeiten:

- Kollaps z.B. eines Sterns nach Erlöschen des Kernbrennens: SM nur für $r > R$ gültig. Weltlinie eines Punktes an der Oberfläche bei $r = R$ ist *zeitartig*: Sobald $R < R_S$, muß der Stern zu einem Punkt zusammenfallen. Regionen III, IV sind unphysikalisch.

- Primordiale Schwarze Löcher, von vornherein vorhanden, können Regionen III und IV haben. Astronauten aus I,III können sich treffen, bevor sie die Singularität erreichen.

<u>Kollaps-Szenarios:</u>

- Weißer Zwerg: entartetes Elektronen-Gas, $M < 1.2 M_\odot$ Chandrasekhar-Grenze (Stabilität), $R \geq 4000$ km

- Neutronen-Stern: Rest einer Supernova, $M < 0.7 M_\odot$, $R >$ 9.6 km Oppenheimer-Volkoff-Grenze

- Schwarzes Loch, absolute Stabilitätsgrenze $R/R_S > 9/8$

<u>Bemerkungen</u>

- Allgemeinste stationäre Lösung für kollabierte Massen vermutlich Kerr-Newman-Lösung der EG mit nur 3 Parametern: Masse M, Drehimpuls L, elektrische Ladung Q. *"Ein schwarzes Loch hat keine Haare"*.

- Singularität hinter dem Schwarzschild-Horizont: *"Kosmische Zensur"*. Es gibt aber auch Lösungen mit nackten Singularitäten (große L und Q).

- M, L, Q können von außen verändert werden. Die Oberfläche des Schwarzen Loches muß dabei gemäß

$$A = 4\pi \left(2M^2 - Q^2 + 2\sqrt{M^4 - M^2 Q^2 - L^2}\right)$$

zunehmen.

- *Hawking-Strahlung*: Quanteneffekt, der (für $L = Q = 0$) zu einer Schwarzkörper-Strahlung mit

$$kT = \frac{\hbar c}{8\pi M}, \qquad T \approx 6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{K}\,\frac{M_\odot}{M}$$

führt. Das Schwarze Loch "verdampft". Lebensdauer

$$t \approx 10^{71}\,\mathrm{sec}\left(\frac{M_\odot}{M}\right)^3$$

Mini-Schwarze-Löcher: $M \approx 10^{12}$ kg, $t \approx 10^{10}$ a, $R_S \approx 10^{-13}$ cm, $T \approx 2 \cdot 10^{11} K$.

- Astrophysikalischer Kandidat ist z.B. SgrA$*$ im Zentrum der Milchstraße. Siehe Physikalische Blätter, Januar 1998.