12 Tests der ART

12.1 Rotverschiebung von Spektrallinien

ART-Rechnung zur Frequenzverschiebung von Photonen, die in einem Gravitationspotential die Differenz ΔU durchlaufen, ergibt das Resultat

$$\frac{\Delta\nu_0}{\nu_0} = \frac{\Delta U}{c^2}$$

Dies stimmt mit dem Resultat der klassischen Rechnung mithilfe des Energiesatzes überein, wenn man den Photonen vermöge

$$E = h\,\nu$$

die Masse

$$m = E/c^2 = h\,\nu/c^2$$

zuschreibt.

Die entsprechenden Experimente testen daher nicht die Struktur der Feldgleichungen.

12.2 Lichtablenkung und Periheldrehung

Gesucht: Geodäten in der Schwarzschildmetrik.

Legen zugrunde:

$$ds^2 = e^{\nu}\, dt^2 - e^{\lambda}\, dr^2 - e^{\mu}\, r^2 \underbrace{\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)}_{d\Omega^2}$$

Variationsprinzip:

$$\delta \int d\lambda\, K = 0, \qquad K = e^{\nu} \dot{t}^2 - e^{\lambda}\, \dot{r}^2 - e^{\mu}\, r^2\, \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2\right)$$

Benutze K statt $\sqrt{K}$, dies erlaubt die Bestimmung von Nullgeodäten.

Bewegungsgleichungen bezüglich eines affinen Parameters $\bar{\lambda}$:

$$\frac{d}{d\bar{\lambda}} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial K}{\partial x^i}$$

t und ϕ kommen in K nicht explizit vor (zyklische Variable):

$$-\frac{\partial K}{\partial \dot{\phi}} = 2\, e^{\mu}\, r^2\, \sin^2\theta\, \dot{\phi} = \text{const} = 2\, l \qquad (A)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{t}} = 2\, e^{\nu}\, \dot{t} = \text{const} = 2\, F \qquad (B)$$

Bewegungsgleichung für θ:

$$2\, e^{\mu}\, r^2\, \sin\theta\, \cos\theta \dot{\phi}^2 = 2 \frac{d}{d\bar{\lambda}} \left(e^{\mu}\, r^2\, \dot{\theta} \right) \qquad (C)$$

Aus (C) folgt, daß die Bewegung in der Äquatorebene bleibt, wenn anfangs $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$.

(A) vereinfacht sich dann zu

$$e^{\mu}\, r^2\, \dot{\phi} = l$$

Statt BG für r aufzustellen, nutze aus, daß $K = \text{const}$ ein Integral der Bewegungsgleichungen ist:

- $K = 0$ für Nullgeodätische (Lichtstrahlen)
- $K = 1$ für die auf die Eigenzeit $\bar{\lambda} = s$ bezogenen zeitartigen Geodäten.

Haben also DGL $(a), (b), (c)$

$$e^{\mu}\, r^2\, \dot{\phi} = l, \quad e^{\nu}\, \dot{t} = F, \quad e^{\nu}\, \dot{t}^2 - e^{\lambda}\, \dot{r}^2 - e^{\mu}\, r^2\, \dot{\phi}^2 = K \quad (K = 0, 1)$$

Schwarzschildmetrik: $e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - 2M/r$, $\mu = 0$.

Einsetzen in (c), $\dot{t}$ und $\dot{\phi}$ mit (a) und (b) eliminieren:

$$\begin{aligned}
\dot{t}\,(1 - 2M/r) &= F \\
r^2\,\dot{\phi} &= l \\
\tfrac{\dot{r}^2}{2} - \tfrac{MK}{r} + \tfrac{l^2}{2r^2} - \tfrac{M\,l^2}{r^3} &= \tfrac{F^2 - K}{2}
\end{aligned}$$

$K = 1$: Form der Gleichung wie Energiesatz eines Teilchens in einem Radial-Potential:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) &= E \\
V_{\text{eff}} &= -\tfrac{M}{r} + \tfrac{l^2}{2r^2} - \tfrac{M\,l^2}{r^3} \\
E &= (F^2 - 1)/2
\end{aligned}$$

ART liefert Zusatzterm $M\,l^2/r^3$. Drehimpulssatz $r^2\,\dot{\phi} = l$ wie klassisch, ausser daß t durch s ersetzt ist.

Für Photonen $(K = 0)$:

$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{M\,l^2}{r^3}$$

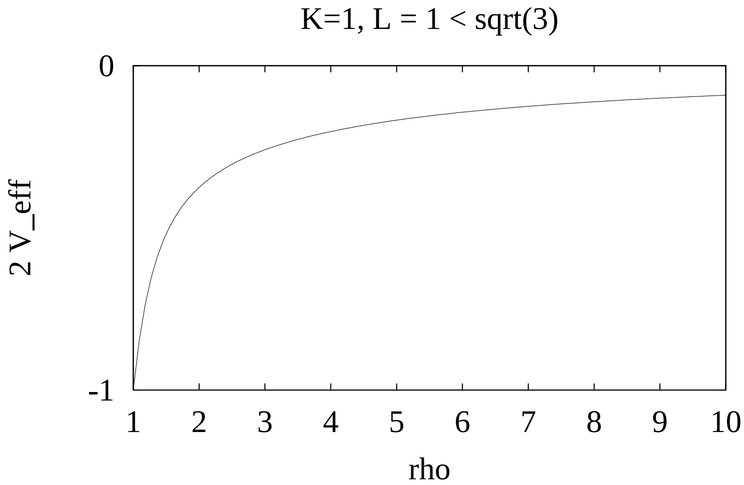
Graphische Diskussion der möglichen Lösungen. Mit $2M = R_S$ definiere

$$\rho \;=\; r/R_S$$

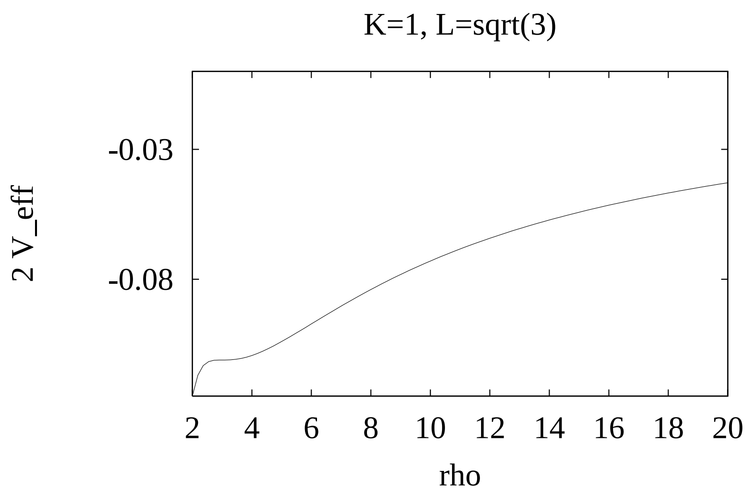
$$L \;= l/R_S$$

Für $K = 1$:

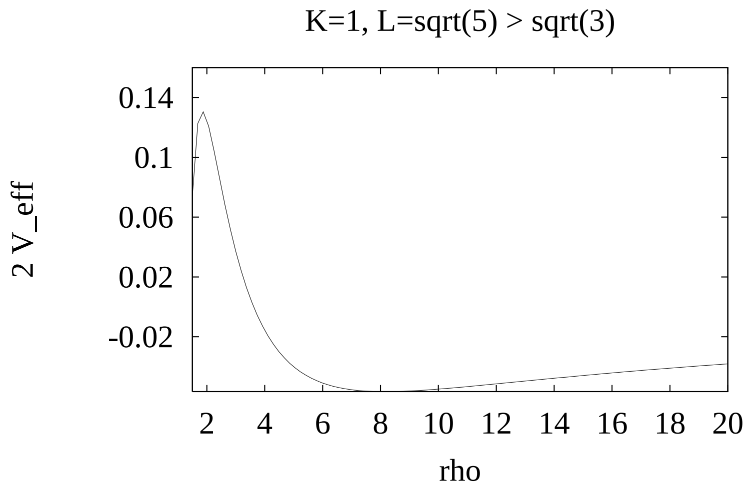
$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\rho} + \frac{L^2}{\rho^2} - \frac{L^2}{\rho^3}\right)$$



Potential für kleine r stark anziehend. Teilchen fallen ungehindert in den Ursprung. Dies ist im Newtonschen Fall nur für $l = 0$ möglich.



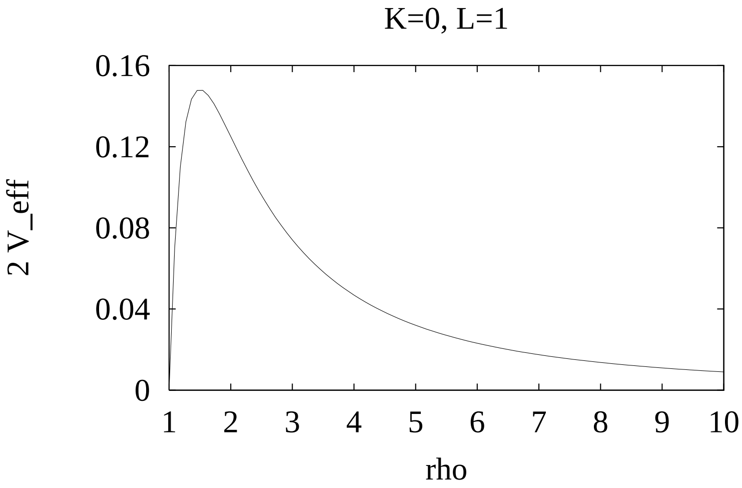
Es bildet sich ein Sattel bei $\rho = 3$ aus.



Es bilden sich zwei Extrema aus, zwischen denen gebundene Bewegung möglich ist. Für hinreichend hohe Energien kann die Potentialbarriere überwunden werden.

Für $K = 0$:

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{\rho^2} - \frac{L^2}{\rho^3}\right)$$



$l \neq 0$ ist nur ein Skalenparameter. Für $\rho = 3/2$, d.h. $r = 3M$, ist eine instabile Kreisbahn möglich.

Berechnung der *Form der Bahnkurve*:
Eliminiere $\dot{t}$ aus (c) mithilfe von (b), schreibe $\dot{r} = (dr/d\phi)\,\dot{\phi}$, eliminiere dann $\dot{\phi}$ mithilfe von (a):

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = e^{2\mu-\lambda-\nu}\frac{F^2\,r^4}{l^2} - K\,e^{2\mu-\lambda}\,\frac{r^4}{l^2} - e^{\mu-\lambda}\,r^2$$

Neue Variable $u = r^{-1}$:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = e^{2\mu-\lambda-\nu}\,F^2\,l^{-2} - K\,e^{2\mu-\lambda}\,l^{-2} - e^{\mu-\lambda}\,u^2 \equiv W^2(u)$$

Gleichung der Bahnkurve (elliptisches Integral)

$$\phi = \int \frac{du}{W(u)}$$

Rechnung einfacher in *isotropen Koordinaten*: Im Schwarzschild-Linienelement

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\,dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\,dr^2 - r^2\,d\Omega^2$$

transformiere gemäß

$$r = \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^2\,\bar{r}$$

Resultat (Querstrich wieder weggelassen)

$$ds^2 = \left(\frac{1 - M/2r}{1 + M/2r}\right)^2\,dt^2 - (1 + M/2r)^4\,d\vec{x}^2$$

mit

$$d\vec{x}^2 = dr^2 + r^2\,d\Omega^2$$

In diesen Koordinaten $\lambda = \mu$, $ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\mu \, d\vec{x}^2$.

Für $K = 1$

$$W^2(u) = e^\mu \left(e^{-\nu} \, F^2 - 1 \right) \, l^{-2} - u^2$$

Reihenentwicklung der Metrik-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} e^{-\nu} &= \left(\tfrac{1+\frac{1}{2} M \, u}{1-\frac{1}{2} M \, u} \right)^2 = 1 + \alpha_1 \, M \, u + \alpha_2 \, M^2 \, u^2 + \ldots \\ e^\mu &= \left(1 + \tfrac{1}{2} M \, u \right)^4 = 1 + \beta_1 \, M \, u + \beta_2 \, M^2 \, u^2 + \ldots \end{aligned}$$

mit

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 2 \qquad \beta_2 = \frac{3}{2}$$

Einsetzen und beachten, daß in der Newtonschen Näherung für Ellipsenbahnen $E = -M/2a$ gilt. a= große Halbachse. Daher $F^2 = 1 + 2E = 1 - M/a$.

Entwickle $W^2(u)$ zu zweiter Ordnung in M (eine Ordnung über die Newtonsche Näherung hinaus):

$$W^2(u) = A + B \, u - C \, u^2$$

mit

$$
\begin{aligned}
A &= -M/(al^2) \\
B &= M\,[2 - 4M/a]\; l^{-2} \\
C &= 1 - 6\,M^2\,l^{-2}
\end{aligned}
$$

Bahngleichung

$$\phi = \int \frac{du}{\sqrt{A + B\,u - C\,u^2}} = \frac{1}{\sqrt{C}}\ \arcsin\ \frac{B - 2\,C\,u}{\sqrt{B^2 + 4\,A\,C}}$$

$C \neq 1$: Statt Ellipse *Rosettenbahn*. Perihelverschiebung pro Umlauf:

$$\Delta\,\phi = \frac{6\,\pi\,M}{a\,(1 - \epsilon^2)}$$

ϵ numerische Exzentrizität der Kepler-Bahn, gegeben durch den Zusammenhang

$$l^2/M = a\,(1 - \epsilon^2)$$

Vergleich mit dem Experiment (Verschiebung pro Jahrhundert)

Planet	$a/10^6$ km	ϵ	$\Delta\phi_{\mathrm{th}}$	$\Delta\phi_{\mathrm{exp}}$
Merkur	57.91	0.2056	43.03	43.11 ± 0.45
Venus	108.21	0.0068	8.6	8.4 ± 4.8
Erde	149.60	0.0167	3.8	5.0 ± 1.2
Icarus	161.00	0.827	10.3	9.8 ± 0.8

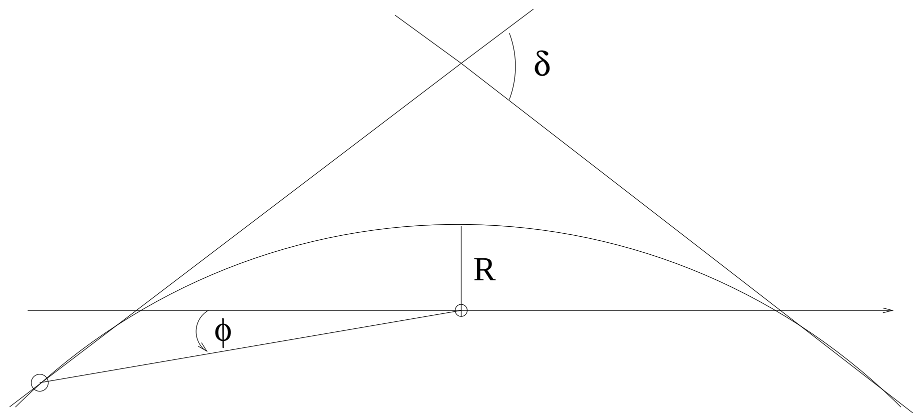
Bemerkung: $C \neq 1$ nur jenseits der linearen Näherung. Periheldrehung daher echter Test der nichtlinearen Struktur der Einsteingleichungen.

Zur Berechnung der *Lichtablenkung* $(K = 0)$ genügt die lineare Näherung:

$$\begin{aligned} A &= F^2 l^2 \\ B &= 4\, M\, F^2\, l^{-2} \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Bahnkurve für den Lichtstrahl:

$$u = r^{-1} = 2\, M\, F^2\, l^{-2} - \left(\frac{F}{l}\right) \sin\phi$$



Mit der Definition $R = l/F$

$$u = \frac{R_S}{R^2} - \frac{1}{R}\,\sin\phi$$

$$\frac{\delta}{2} = \phi|_{u=0}\,, \qquad \sin\phi = \frac{R_S}{R} \approx \phi \quad \rightarrow \quad \delta = \frac{4\,M}{R}$$

$\phi = 3\pi/2$:

$$\frac{1}{r} = \frac{R_S}{R^2} + \frac{1}{R} \approx \frac{1}{R}$$

Vorhersage für Licht, das am Sonnenrand vorbeiläuft: $\delta = 1.75"$.
Beobachtung: $1.5" < \delta < 2.2"$.

Ablenkung von Radiowellen des Quasars 3C275, jeweils am 8. Oktober: Radiointerferometrische Messungen: $\delta = 1.76"\pm 0.02"$.

Klassische Rechnung (erstmalig von Soldner 1801, später von Einstein 1908) ergibt für den Ablenkungswinkel die Hälfte des ART-Wertes.

12.3 Hafele-Keating-Experiment

Experiment wurde bereits früher besprochen. Tragen hier nach, daß der Gang einer Uhr, die auf einer Kreisbahn in der Schwarzschildmetrik kreist, gegenüber einer unendlich weit entfernten Uhr durch

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 - \frac{3M}{r}} \approx 1 - \frac{3M}{2r}$$

gegeben ist.

Schwarzschild-Metrik mit $\theta = \pi/2$, $d\theta = 0$, $dr = 0$, d.h. Kreisbahn in der Äquator-Ebene:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - r^2\, d\phi^2$$

Teile durch dt^2 und benutze $\dot{\phi} = l/r^2$ und $l^2 = M\, r$:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - r^2\dot{\phi}^2 = 1 - \frac{3\,M}{r}$$