11 Gravitationstheorie

11.1 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Vorgehensweise: Postuliere die Einsteinschen Feldgleichungen und studiere einige ihrer Eigenschaften und Lösungen.

$$\underbrace{R_{ik} - \frac{1}{2}\, g_{ik}\, R}_{G_{ik}} = -\kappa\, T_{ik}$$

mit

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 1.86 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{cm/g}$$

- T_{ik} symmetrischer Energie-Impulstensor der Materie
- 10 partielle DGL zweiter Ordnung zur Bestimmung der g_{ik}
- *linear* in den zweiten Ableitungen der Metrik
- *nichtlinear* in den zweiten Ableitungen der Metrik

EG können aus einem Variationsprinzip hergeleitet werden:

$$S = \int d^4x\, \sqrt{-g}\, \left(\frac{R}{2\kappa} + L_M(A, g_{ik}) \right)$$

- g: Determinante des metrischen Tensors
- $d^4x\,\sqrt{-g}$: invariantes Integrations-Maß
- $L_M(A, g_{ik})$ Lagrangefunktion der Materie, z.B. für ein skalares Feld

$$L_M = \frac{1}{2}\left(g^{ik} A_{,i}\, A_{,k} - m^2\, A^2\right)$$

EG aus Variation von S nach den g_{ik}, Bewegungsgleichungen der Materie-Felder durch Variation nach den A

Lösung der EG eindeutig bei physikalisch richtigen Randbedingungen? NEIN!

Die Bianchi-Identitäten

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}\, R\right)^{;k} = 0, \qquad i = 0, \ldots, 3$$

ergeben vier Relationen. Bleiben sechs unabhängige Gleichungen für die zehn Freiheitsgrade der Metrik. Die vier überzähligen Freiheitsgrade entsprechen den Koordinatentransformationen

$$x^{\bar{i}} = f^i\left(x^k\right)$$

Vergleiche Eichfreiheit in der Elektrodynamik.

Bianchi-Identitäten $\rightsquigarrow$ Erhaltungssatz für Energie-Impulstensor

$$T_{ik}{}^{;k} = 0$$

EG sind nur bei erhaltenem Energie-Impulstensor konsistent. Vergleiche Maxwellgleichungen, wo ein erhaltener Strom Konsistenzbedingung ist.

Randbedingungen für die EG:

- Betrachte ein *Abgeschlossenes System*, der Einfluß aller übrigen Objekte im Weltall wird vernachlässigt. Gravitationsfelder asymptotisch wie $1/r$, Metrik $\to \eta_{ik}$.
- Weltall als Ganzes $\to$ *Kosmologie*. Randbedingungen werden durch Homogenitätsforderungen ersetzt ("kosmologisches Prinzip")
- *Anfangswertproblem*, z.B. für numerische Rechnungen. Auf einer raumartigen Hyperfläche seien die Werte der g_{ik} und deren ersten Normalen-Ableitungen gegeben. EG bestimmt die Zeitentwicklung von der Hyperfläche weg eindeutig (bis auf die Freiheit der Koordinatentransformation).

11.2 Die lineare Näherung der EG

Im geeigneten Limes soll Newtons Theorie herauskommen. Schwache Gravitationsfelder:

$$g_{ik} = \eta_{ik} + 2\,\psi_{ik}$$

Terme $\simeq \psi^2$ vernachlässigbar. Zusammenhangskoeffizienten sind von erster Ordnung in den ψ,

$$\Gamma_{jik} = \psi_{ji,k} + \psi_{kj,i} - \psi_{ik,j}$$

so daß in *Riemann* Terme $\simeq \Gamma^2$ vernachlässigbar:

$$R^i{}_{kjm} = \Gamma^i{}_{km,j} - \Gamma^i{}_{kj,m}$$

Ricci:

$$R_{km} = \psi_{km}{}^{,i}{}_{i} + \psi^i{}_{i,km} - \psi^i{}_{m,ik} - \psi^i{}_{k,mi}$$

Kontraktion ergibt den *Krümmungsskalar*:

$$R = 2\,\psi^i{}_{i,}{}^k{}_k - 2\psi^{ik}{}_{,ik}$$

Indizes wurden im Rahmen der Näherung mit η gezogen.

Einsetzen liefert die *linearisierten* EG:

$$\psi_{km,i}{}^{i} + \psi^{i}{}_{i,km} - \psi^{i}{}_{m,ik} - \psi^{i}{}_{k,im} + \eta_{km}\,\psi^{ij}{}_{,ij} - \eta_{km}\,\psi^{i}{}_{i,}{}^{j}{}_{j} - = -\kappa\, T_{km}$$

Zur *Entkopplung* nutze die Freiheit der Koordinatentransformation

$$x^{i} = x^{\bar{i}} + 2\,\Lambda^{\bar{i}}(x)$$

Λ klein, so daß Λ^2 vernachlässigbar.

$$g_{\bar{i}\bar{k}} = \eta_{\bar{i}\bar{k}} + 2\psi_{\bar{i}\bar{k}} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{\bar{i}}}\frac{\partial x^{m}}{\partial x^{\bar{k}}} g_{jm} = (\delta^{j}{}_{\bar{i}} + 2\Lambda^{j}{}_{,\bar{i}})(\delta^{m}{}_{\bar{k}} + 2\Lambda^{m}{}_{,\bar{k}})(\eta_{jm} + 2\,\psi_{jm})$$

Daher

$$\psi_{\bar{i}\bar{k}} = \psi_{ik} + \Lambda_{i,k} + \Lambda_{k,i}$$

Man kann explizit nachrechnen, daß $\psi_{\bar{i}\bar{k}}$ die linearisierten EG erfüllt, falls diese von ψ_{ik} gelöst werden. Dieses Phänomen ist völlig analog zur Eichinvarianz in der *Elektrodynamik*.

Entkopplung der Gleichungen durch *Eichfixierung*.

Harmonische Koordinaten:

$$\psi_{ik}{}^{,k} = \frac{1}{2}\,\psi^{k}{}_{k,i}$$

In diesen Koordinaten

$$R_{ik} = \Box\,\psi_{ik}, \qquad R = \Box\,\psi_{i}{}^{i}$$

Linearisierte EG:

$$\Box\left(\psi_{km} - \frac{1}{2}\eta_{km}\,\psi_{l}{}^{l}\right) = -\kappa\,T_{km}$$

Spurbildung:

$$\Box\psi_{l}{}^{l} = \kappa\,T_{l}^{l}$$

Finale Form der LEG in harmonischer Eichung:

$$\Box\psi_{km} = -\kappa\left(T_{km} - \frac{1}{2}\eta_{km}\,T_l{}^l\right)$$

Herleitung des Newtonschen Grenzfalls: Quellen ohne starken inneren Druck (kleine Dichte) und mit kleinen Geschwindigkeiten:

$$T_{km} = \rho\,\delta_{k,0}\,\delta_{m,0}$$

ergibt

$$\psi_{00} = \psi_{11} = \psi_{22} = \psi_{33}$$

wobei

$$-\Box\psi_{00} = \frac{4\pi G}{c^2}\,\rho \approx \Delta\psi_{00}$$

Newtonsches Gravitationspotential:

$$\psi_{00} = U/c^2$$

Linienelement:

$$ds^2 = c^2\, dt^2 \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) - d\vec{x}^2 \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)$$

Die gewonnene Näherung geht über die im Rahmen der Newtonschen Näherung für die Geodätengleichung gewonnene Metrik hinaus. Die bisher gewonnenen Resultate reichen bereits zur Berechnung von *Lichtablenkung* und *Rotverschiebung*, nicht aber für die Berechnung der *Periheldrehung* des Merkur.

Allgemeine Lösung der LEG mithilfe der retardierten Greensfunktion

$$G(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}\, \delta(|\vec{x}| - t)$$

$$\psi_{ik}(\vec{x}, t) = -2\, G \int d^3x'\, \frac{T_{ik}(\vec{x}', t') - \frac{1}{2}\, \eta_{ik}\, T_l{}^l(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

wobei

$$t' = t - |\vec{x} - \vec{x}'|$$

Einzige vorgenommene Näherung: $|\psi_{ik}| \ll 1$

11.3 Die Schwarzschild-Metrik

Die Schwarzschild-Metrik ist eine exakte kugelsymmetrische Lösung der EG im Vakuum,

$$R_{ik} = 0$$

Allgemeine Form des Linienelements:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2\, g_{0\alpha}\, dx^0\, dx^\alpha + g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

Rotationssymmetrie bedeutet, daß das Linienelement invariant ist unter räumlichen Drehungen, d.h. Koordinatentransformationen

$$x^{\bar{\alpha}} = D^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\, x^\beta, \qquad D\, D^T = \mathbf{1}$$

Allgemeinste Koeffizientenfunktionen, die diese Forderung erfüllen, sind von der Form

$$\begin{aligned} g_{00} &= \quad f(r, x^0) \\ g_{0\alpha} &= -g(r, x^0)\, x^\alpha / r \\ g_{\alpha\beta} &= -h(r, x^0)\, \delta_{\alpha\beta} - j(r, x^0)\, x^\alpha\, x^\beta / r^2 \end{aligned}$$

mit

$$r^2 = \delta_{\alpha\beta}\, x^\alpha\, x^\beta \qquad dr = \delta_{\alpha\beta} \frac{x^\alpha\, dx^\beta}{r}$$

Polarkoordinaten:

$$d\vec{x}^2 = dr^2 + r^2\, d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\Theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$$

Mit der Definition $x^0 = t$

$$ds^2 = f(r,t)\, dt^2 - 2g(r,t)\, dr\, dt - [h(r,t) + j(r,t)]\, dr^2 - r^2\, h(r,t)\, d\Omega^2$$

Nutze vermutete Zeitunabhängigkeit des Linienelements nicht aus, da sie von selbst herauskommt.

Koordinatentransformationen der Form

$$r = u(\bar{r},\bar{t}), \qquad t = v(\bar{r},\bar{t}) \qquad\qquad (KT)$$

Neue Radialkoordinate durch

$$r^2\, h(r,t) = \bar{r}^2, \qquad t = \bar{t}$$

Alle Koeffizientenfunktionen ändern sich, z.B. $f \to \bar{f}$. Aus Bequemlichkeit lassen wir den Querstrich weg.

$$ds^2 = f(r,t)\, dt^2 - 2\, g(r,t)\, dr\, dt - [h(r,t) + j(r,t)]\; dr^2 - r^2\, d\Omega^2$$

Durch Transformation der Zeitkoordinate kann man den gemischten Term $\simeq dr\, dt$ wegschaffen.

$$t = v(\bar{r}, \bar{t}), \qquad r = \bar{r}$$

Differentiation:

$$dt = \frac{\partial v}{\partial \bar{t}}\, d\bar{t} + \frac{\partial v}{\partial \bar{r}}\, dr$$

Gemischter Term in der transformierten Metrik,

$$2\, \frac{\partial v}{\partial \bar{t}} \left(f \frac{\partial v}{\partial r} - g \right) dr\, d\bar{t}$$

verschwindet, wenn die r-Abhängigkeit von $v(r, \bar{t})$ gemäß

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{g(v,r)}{f(v,r)}$$

gewählt wird.

Linienelement kann also in die Form

$$ds^2 = e^\nu \, dt^2 - e^\lambda \, dr^2 - r^2 \, d\Omega^2$$

mit $\nu = \nu(r,t)$ und $\lambda = \lambda(r,t)$ gebracht werden.

Nach längerer Rechnung findet man für die nichtverschwindenden Komponenten des Einstein-Tensors

$$G^1{}_1 = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu_r}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} \qquad (A)$$

$$\begin{aligned} G^2{}_2 = G^3{}_3 = \; & \tfrac{1}{2}\, e^{-\lambda}\left(\nu_{rr} + \tfrac{\nu_r^2}{2} + \tfrac{\nu_r - \lambda_r}{r} - \tfrac{\nu_r \lambda_r}{2}\right) \\ & - \tfrac{1}{4}\, e^{-\nu}\left(2\lambda_{tt} + \lambda_t^2 - \lambda_t \, \nu_t\right) \qquad (B) \end{aligned}$$

$$G^0{}_0 = \frac{1}{r^2}\, e^{-\lambda}(1 - \lambda_r \, r) - \frac{1}{r^2} \qquad (C)$$

$$G^0{}_1 = e^{-\lambda}\, \lambda_t / r \qquad (D)$$

Aus (D) folgt $\lambda_t = 0$. Subtraktion von (A) und (C) ergibt

$$\lambda_r + \nu_r = 0$$

und daher

$$\lambda + \nu = q(t), \qquad q \text{ beliebige Funktion der Zeit}$$

Transformation der Zeitkoordinaten

$$\bar{t} = \int_{t_0}^{t} dt' \ \exp[q(t')/2]$$

bewirkt $\nu \to \nu - q$, so daß mit dieser Zeitkoordinate

$$\nu = -\lambda$$

Multiplikation von (C) mit $r^2\, e^\lambda$

$$r\,\lambda_r = 1 - e^\lambda \qquad \int \frac{d\lambda}{1 - e^\lambda} = \int \frac{dr}{r}$$

Mit $e^\lambda = 1/\Phi$:

$$\ln r = -\ln|1 - \Phi| + C$$

Definiere $C = \ln(2\,M)$:

$$\Phi = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M}{r}$$

Schwarzschild-Linienelement

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\, dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2$$

$2M$ ist der Schwarzschildradius R_S.

Bemerkungen:

- Metrik statisch als Konsequenz der EG
- Einzige Integrationskonstante R_S, keine Abhängigkeit von der expliziten Form des Energie-Impulstensors. Feld im Außenraum eines kugelförmigen Körpers ist unabhängig von der Zusammensetzung des Körpers. Dieser darf sogar oszillieren.
- *Birkhoff-Theorem*: Die Schwarzschild-Lösung ist die einzige kugelsymmetrische Lösung der ART
- Gleichung (B) wurde nicht benutzt. Sie ist als Konsequenz der Bianchi-Identitäten automatisch gelöst.
- Die Singularität des Koeffizienten g_{11} bei $r = R_S$ ist eine Koordinatensingularität.