# 10 Riemannsche Geometrie

## 10.1 Riemannsche Normalkoordinaten

Geodäten sind besonders geeignete Koordinatenlinien (z.B. Kartesische Koordinaten im Euklidischen).

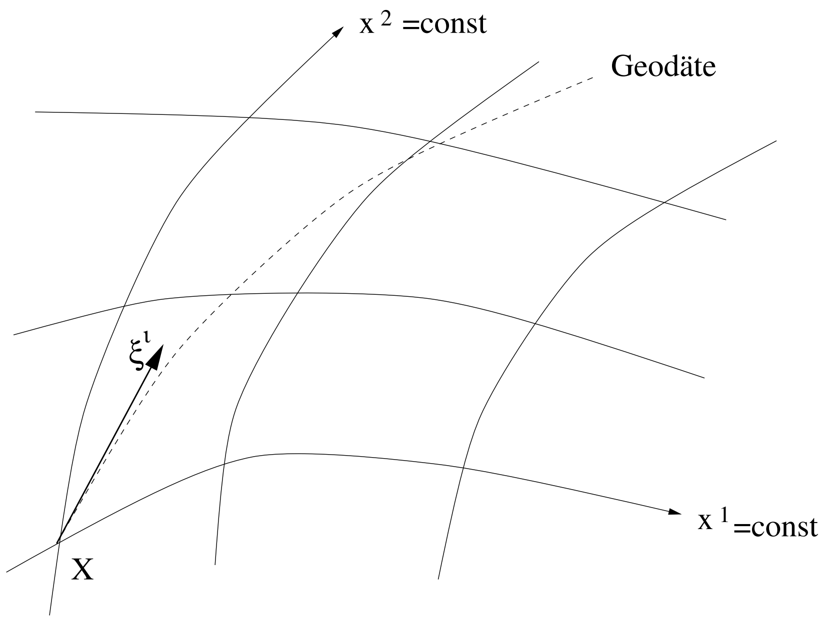
Auch in einem Riemannschen Raum nimmt die Metrik eine besonders einfache Form an, wenn man Geodäten als Koordinatenlinien verwendet (RKS = Riemannsches Koordinatensystem).

Geodätengleichung:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{kl}\,\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0.$$

Gehen aus von einem beliebigen KS. Eine Geodäte sei gegeben durch $x^i = x^i(s)$.

Ursprung des neuen Koordinatensystems: $X^i \equiv x^i(s=0)$.




Entwickle $x^i(s)$ in eine Taylorreihe nach Potenzen von $s$:

$$x^i = X^i + \xi^i\, s + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\right)_0 s^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3x^i}{ds^3}\right)_0 s^3 + \ldots$$

mit

$$\xi^i = \left(\frac{dx^i}{ds}\right)_0$$

Koeffizient von $s^2$ läßt sich vermöge der Geodätengleichung durch die Christoffel-Symbole bei $X^i$ ausdrücken:

$$\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\right)_0 = -\Gamma^i{}_{kl}\,\xi^k\,\xi^l\,.$$

Differentiation der Geodätengleichung nach $s$ liefert die Koeffizienten der höheren Potenzen von $s$:

$$\frac{d^3x^i}{ds^3} + \Gamma^i{}_{jkl}\,\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0$$

mit

$$\Gamma^i{}_{jkl} = \frac{1}{3!}\left(\Gamma^i{}_{kj,l}\; - \Gamma^i{}_{rk}\,\Gamma^r{}_{jl}\; - \Gamma^i{}_{jr}\,\Gamma^r{}_{kl}\; + \text{Permutationen von}(j,k,l)\right)$$

Damit für die Geodäte:

$$x^i(s) = X^i + \xi^i\,s - \frac{1}{2}\,\Gamma^i{}_{kl}\,\xi^k\,\xi^l\,s^2 - \frac{1}{3!}\,\Gamma^i{}_{klm}\xi^k\,\xi^l\,\xi^m s^3 + \ldots$$

$\xi^i$ ist ein beliebiger Einheitsvektor, der die Richtung der Geodäte bei $s = 0$ angibt.

Definition:

$$y^i = \xi^i\,s$$

Damit

$$x^i = X^i + y^i - \frac{1}{2}\Gamma^i{}_{kl}\,y^k\,y^l + \ldots$$

Betrachte dies als implizite Definition einer Koordinatentransformation $x \to y$, d.h.

$$y^i = (x^i - X^i) + \frac{1}{2}\Gamma^i{}_{kl}\,(x^k - X^k)\,(x^l - X^l) + \ldots$$

Die neuen Koordinaten spannen das RKS auf, da die Koordinatenlinien $y^i = \xi^i\, s$ Geodätische sind.

Linienelement im RKS:

$$ds^2 = \bar{g}_{ij}\, dy^i\, dy^j$$

Geodätengleichung im RKS,

$$\frac{d^2 y^i}{ds^2} + \bar{\Gamma}^i{}_{kl}(y)\,\frac{dy^k}{ds}\frac{dy^l}{ds} = 0$$

wird von den $y^i = \xi^i\, s$ im Ursprung gelöst:

$$\bar{\Gamma}^i{}_{kl}\,\xi^k\,\xi^l = 0$$

Da $\xi^k$ beliebig:

$$\bar{\Gamma}^i{}_{kl}(0) = 0$$

Wegen der Symmetrie-Eigenschaft

$$\bar{\Gamma}_{lik} = \bar{\Gamma}_{lki}$$

folgt

$$\bar{g}_{ik,l}(0) = 0$$

Daher

$$\bar{g}_{ik}(y) = \bar{g}_{ik}(0) + c_{iklm}\, y^l\, y^m + \ldots$$

Man kann stets erreichen, daß $\bar{g}_{ik}(0) = \eta_{ik}$ (Riemannsche *Normalkoordinaten*).

Ursprüngliche Koordinaten $x^i \to x^{\bar{i}}$:

$$y^{\bar{i}} = \xi^{\bar{i}}\, s = \left(\frac{dx^{\bar{i}}}{ds}\right)_0 s = \left(\frac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^k}\right)_0 \left(\frac{dx^k}{ds}\right)_0 s = \left(\frac{\partial x^{\bar{i}}}{dx^k}\right)_0 \xi^k s = \left(\frac{\partial x^{\bar{i}}}{dx^k}\right)_0 y^k$$

Die Riemannschen Koordinaten erfahren daher bei beliebigen Koordinatenänderungen eine lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten. Diese Freiheit kann man benutzen, um die $\bar{g}_{ik}(0)$ auf die Form $\eta_{ik}$ zu bringen.

## 10.2 Die kovariante Ableitung

Die gewöhnliche Ableitung eines Tensors nach den Koordinaten transformiert sich im allgemeinen *nicht* wie ein Tensor. Dies liegt daran, daß der Vergleich von Vektoren an zwei verschiedenen Raumzeit-Punkten erst nach einem (im gekrümmten Raum nichttrivialen) Paralleltransport möglich ist.

Definitionen:

$$\begin{aligned} p^{\bar{i}}{}_{k} &= \tfrac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^{k}} \\ p^{k}{}_{\bar{i}} &= \tfrac{\partial x^{k}}{\partial x^{\bar{i}}} \\ p^{\bar{i}}{}_{kl} &= \tfrac{\partial^2 x^{\bar{i}}}{\partial x^{k}\partial x^{l}} \end{aligned}$$

Relationen aus der Kettenregel:

$$\begin{aligned} p^{\bar{l}}{}_{k}\, p^{k}{}_{\bar{i}} &= \delta^{\bar{l}}_{\bar{i}} \\ p^{\bar{k}}{}_{l}\, p^{i}{}_{\bar{k}} &= \delta^{i}_{l} \end{aligned}$$

Die Ableitung eines Skalars transformiert sich wie ein (kovarianter) Vektor:

$$\phi_{,\bar{i}}(\bar{x}) = \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{\bar{i}}}\, \phi_{,k}(x) = p^{k}{}_{\bar{i}}\, \phi_{,k}(x)$$

Ableitung eines Vektors:

$$A^{\bar{i}}{}_{,\bar{k}} = \frac{\partial x^l}{\partial x^{\bar{k}}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left( p^{\bar{i}}{}_r \, A^r \right) = p^l{}_{\bar{k}} \, p^{\bar{i}}{}_{rl} \, A^r + p^l{}_{\bar{k}} \, p^{\bar{i}}{}_r \, A^r{}_{,l} \qquad (KA)$$

Der erste Term auf der rechten Seite stört. Er tritt auf, weil die $p's$ von $x$ abhängen.

Ausweg: Definiere die Ableitung in einem RNKS bei $x$. Geht man dann auf ein anderes RNKS bei $x$ über, so sind die Transformationskoeffizienten konstant, und der störende Term tritt nicht auf.

Definition der *kovarianten Ableitung* in einem beliebigen Koordinatensystem durch

$$A^i{}_{;k} = p^i{}_{\bar{l}}(x) \, p^{\bar{m}}{}_k(x) \, A^{\bar{l}}{}_{,\bar{m}} \qquad (KB)$$

Querstriche markieren ein RNKS mit $g_{ik} = \eta_{ik}$.

Um einen expliziten Ausdruck für die kovariante Ableitung zu finden, setze $(KA)$ in $(KB)$ ein:

$$
\begin{aligned}
A^i{}_{;k} &= p^i{}_{\bar{l}}\, p^{\bar{m}}{}_k\, A^{\bar{l}}{}_{,\bar{m}} = p^i{}_{\bar{l}}\, p^{\bar{m}}{}_k\, \left(p^{\bar{l}}{}_a\, p^b{}_{\bar{m}}\, A^a{}_{,b} + p^b{}_{\bar{m}}\, p^{\bar{l}}{}_{ab}\, A^a\right) \\
&= A^i{}_{,k} + p^i{}_{\bar{l}}\, p^{\bar{l}}{}_{ak}\, A^a
\end{aligned}
$$

Zur Auswertung des zweiten Terms differenziere die Relation

$$
g_{ak} = p^{\bar{l}}{}_a\, p^{\bar{m}}{}_k\, \eta_{\bar{l}\bar{m}}
$$

nach $x^r$:

$$
g_{ak,r} = \left(p^{\bar{l}}{}_{ar}\, p^{\bar{m}}{}_k + p^{\bar{l}}{}_a\, p^{\bar{m}}{}_{kr}\right)\, \eta_{\bar{l}\bar{m}}
$$

Durch Permutation der Indizes:

$$
\Gamma_{rak} = p^{\bar{l}}{}_{ak}\, p^{\bar{m}}{}_r\, \eta_{\bar{l}\bar{m}}
$$

Es gilt

$$
\Gamma^i{}_{ak} = g^{ir}\, \Gamma_{rak} = \eta^{\bar{b}\bar{c}}\, p^i{}_{\bar{b}}\, p^r{}_{\bar{c}}\, p^{\bar{l}}{}_{ak}\, p^{\bar{m}}{}_r\, \eta_{\bar{l}\bar{m}} = p^{\bar{l}}{}_{ak}\, p^i{}_{\bar{l}}
$$

Das endgültige Resultat für die kovariante Ableitung ist daher

$$A^i{}_{;k} = A^i{}_{,k} + \Gamma^i{}_{ka}\, A^a$$

Tensoreigenschaft folgt aus der Definition, kann aber auch explizit nachgerechnet werden.

Kovariante Ableitung *anderer Tensortypen*:

Für einen Skalar stimmen gewöhnliche und kovariante Ableitung überein. Daher:

$$\phi_{;k} = (A^i\, B_i)_{;i} = A^i{}_{;k}\, B_i + A^i\, B_{i;k} = \phi_{,k} = A^i{}_{,k}\, B_i + A^i\, B_{i,k}$$

Haben für die kovariante Ableitung die *Produktregel* gefordert.

Da $A$ und $B$ beliebige Vektoren, folgt

$$B_{i;k} = B_{i,k} - \Gamma^l{}_{ik}\, B_l$$

Das Transformationsverhalten von Tensoren beliebiger Stufe ergibt sich aus dem Verhalten des Produkts entsprechend vieler ko- bzw. kontravarianter Vektoren:

$$T^{ik\ldots}{}_{lm\ldots;r} = T^{ik\ldots}{}_{lm\ldots,r} \;\; + \Gamma^{i}{}_{rs}\, T^{sk\ldots}{}_{lm\ldots} + \Gamma^{k}{}_{rs}\, T^{is\ldots}{}_{lm\ldots} + \ldots$$

$$- \Gamma^{s}{}_{rl}\, T^{ik\ldots}{}_{sm\ldots} - \Gamma^{s}{}_{rm}\, T^{ik\ldots}{}_{ls\ldots} - \ldots$$

Sämtliche Komponenten des metrischen Tensors sind *kovariant konstant*:

$$g_{ik;l} = g^{ik}{}_{;l} = 0$$

Dies erleichtert das Hinauf- und Hinunterziehen von Indizes erheblich, z.B.

$$A^{i}{}_{;k} = \left(g^{il}\, A_l\right)_{;k} = g^{il}\, A_{l;k}$$

Definition der *absoluten Ableitung eines Vektorfeldes entlang einer Kurve:*

$$C : \tau \to x^{i}(\tau)$$

$$\frac{DA^i}{D\tau} = A^{i}{}_{;k}\, \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{dA^i}{d\tau} + \Gamma^{i}{}_{kj}\, A^j\, \frac{dx^k}{d\tau}$$

Ein Vektor heißt *entlang der Kurve C parallelverschoben*, wenn

die absolute Ableitung längs $C$ verschwindet, $Dv^i/Ds = 0$.
Bei Parallelverschiebung entlang eines infinitesimalen Stückes $dx^i$ ändern sich die Vektorkomponenten um

$$dv^i = -\Gamma^i{}_{kl}\, v^k\, dx^l$$

Bei Parallelverschiebung entlang einer Geodäten $C$ ändert sich der Winkel zwischen dem Tangentialvektor an $C$ und dem verschobenen Vektor nicht.

### 10.3 Der Riemannsche Krümmungstensor

Anders als bei gewöhnlichen partiellen Ableitungen ist die Reihenfolge der Differentiation bei kovarianten Ableitungen *nicht* egal.

Skalar:

$$\phi_{;i;j} = (\phi_{;i})_{;j} = (\phi_{,i})_{;j} = \phi_{,ij} - \phi_{,m}\, \Gamma^m{}_{ij}$$

In $i, j$ symmetrisch wegen der entsprechenden Eigenschaft der Christoffelsymbole.

Vektor:

$$
\begin{aligned}
A_{i;k;j} &= \left(A_{i;k}\right)_{,j} - A_{m;k}\,\Gamma^m{}_{ji} - A_{i;m}\,\Gamma^m{}_{jk} \\
&= A_{i,jk} - A_{m,j}\,\Gamma^m{}_{ik} - A_m\,\Gamma^m{}_{ik,j} - A_{i,m}\,\Gamma^m{}_{kj} \\
&+ A_r\,\Gamma^r{}_{mi}\Gamma^m{}_{kj} - A_{m,k}\,\Gamma^m{}_{ji} + A_r\,\Gamma^m{}_{ji}\,\Gamma^r{}_{mk}
\end{aligned}
$$

Vertauschen der Ableitungen nach $i$ und $j$ ergibt die *Ricci-Identität*:

$$A_{i;k;j} - A_{i;j;k} = A_r\,R^r{}_{ikj}$$

mit dem *Riemannschen Krümmungstensor*

$$R^r{}_{ikj} = \Gamma^r{}_{ij,k} - \Gamma^r{}_{ik,j} + \Gamma^r{}_{mk}\,\Gamma^m{}_{ij} - \Gamma^r{}_{mj}\,\Gamma^m{}_{ik}$$

Die Tensoreigenschaft des Riemann-Tensors folgt aus dem Quotiententheorem.

Vollständig kovarianter Riemann-Tensor:

$$R_{hijk} = R^r{}_{ijk}\,g_{hr}$$

Durch leichte aber lange Rechnung kann man die folgende äquivalente Darstellungen finden:

$$R_{hijk} = \Gamma_{hik,j} - \Gamma_{hij,k} + \Gamma^{l}{}_{ij}\Gamma_{lhk} - \Gamma^{l}{}_{ik}\Gamma_{lhj}$$

$$R_{hijk} = \frac{1}{2}\left(g_{hk,ij} + g_{ij,hk} - g_{ik,jh} - g_{jh,ik}\right) + g^{lm}\left(\Gamma_{mij}\,\Gamma_{lhk} - \Gamma_{mik}\,\Gamma_{lhj}\right)$$

Aus der letzten Darstellung liest man die Symmetrie-Eigenschaften ab:

$$R_{hijk} = -R_{ihjk}$$

$$R_{hijk} = -R_{hikj}$$

$$R_{hijk} = R_{jkhi}$$

$$R_{hijk} + R_{hjki} + R_{hkij} = 0$$

Riemann hat nur 20 unabhängige Komponenten.

Riemann ist von zentraler Bedeutung für die ART. Sein Verschwinden in irgendeinem Koordinatensystem bedeutet, daß der Raum lokal flach ist, d.h. jeder Punkt hat eine Umgebung, in der ein Koordinatensystem existiert mit $g_{ik} = \eta_{ik}$.

Von zentraler Bedeutung sind später:

*Ricci-Tensor:*

$$R_{ik} = R^h{}_{ikh} = R_{ki}$$

*Krümmungs-Skalar:*

$$R = R_{ik}\, g^{ik}$$

Durch kovariante Ableitung der Definitionsgleichung für Riemann ergeben sich die *Bianchi-Identitäten*:

$$R^h{}_{ijk;l} + R^h{}_{ikl;j} + R^h{}_{ilj;k} = 0$$

Kontraktion der Bianchi-Identitäten über die Indizes $h$ und $j$:

$$R_{ik;l} - R^h{}_{ikl;h} - R_{il;k} = 0$$

Multiplikation mit $g^{il}$ ergibt

$$R^h{}_{k;h} = \frac{1}{2}\, R_{;k}$$

Dies kann man auch in der Form

$$G^i{}_{k;i} = 0\,, \qquad\qquad G^i{}_k = R^i{}_k - \frac{1}{2}\delta^i{}_k\, R$$

schreiben.

Die Divergenz des *Einstein-Tensors* $G^i{}_k$ verschwindet. Dies wird von zentraler Bedeutung für die ART sein. In 4 Raumzeit-Dimensionen ist nämlich $G_{ik}$ neben dem metrischen Tensor der einzige divergenzfreie Tensor, der aus $g_{ik}$ und dessen zweiten Ableitungen gebildet werden kann.