1 Ist die Welt ein Kürbis?

(frei nach Wolfgang Rindler, Am. J. Phys. 62 (1994) 887)

SRT: Einstein 1905

$\Downarrow$ Verallgemeinerung

ART: Einstein 1915

Hätte es auch anders herum passieren können?

Z.B. so:

ART: Riemann 1860

$\Downarrow$ Spezialisierung

SRT: 1860

<u>neue</u> Theorie = Antwort auf Schwierigkeiten (Widerspruch zum Experiment), Paradoxa, Puzzles in <u>älteren</u> Theorien

<u>Beispiele:</u>

- Newtonsche Mechanik in Konflikt mit der klassischen Elektrodynamik: Maxwell-Gleichungen sind nicht forminvariant unter Galilei-Transformation. Lösung: SRT
- Puzzle: Wieso sind schwere und träge Masse gleich groß? Lösung: ART

Zwei bedeutende Ereignisse im Jahre **1854**:

- Die Eisenbahn erreicht Göttingen.
- Habilitation von *Bernhard Riemann* (1826-1866): Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen".

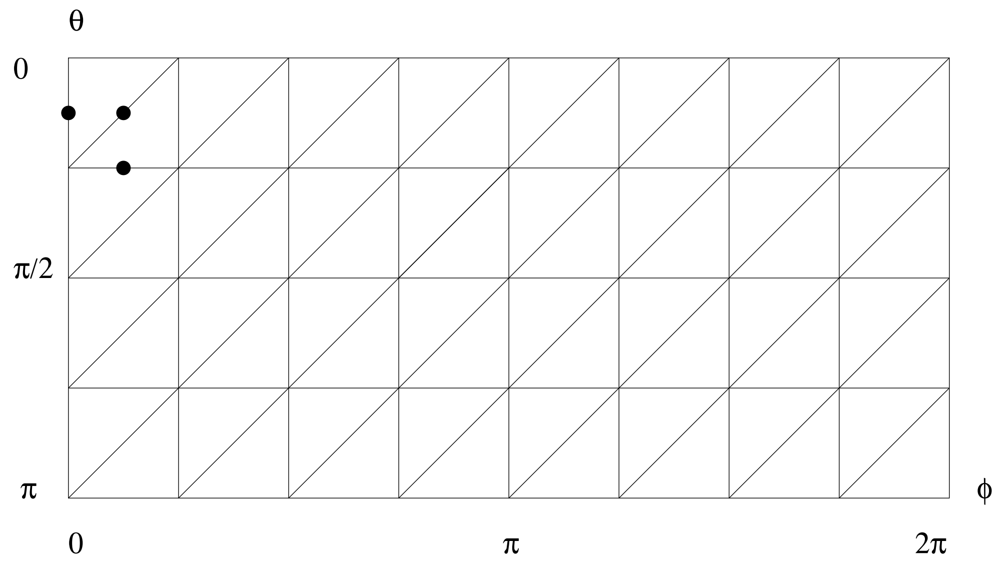
1.1 Geometrie 2-dimensionaler Flächen

Karl Friedrich Gauß (1777-1855):
Differentialgeometrie von 2-dimensionalen Flächen.
Zentraler Begriff: *Metrik* = Formel, die den Abstand ds zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten angibt.
Beispiel: Oberfläche einer Kugel mit Radius R.

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right) \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \quad \text{Polarwinkel} \\ 0 &\leq \phi \leq 2\pi \quad \text{Azimutalwinkel} \end{aligned}$$

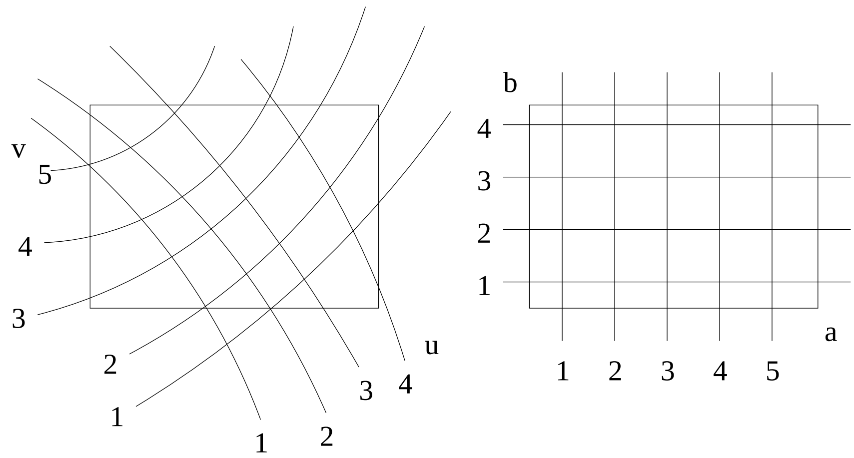
Die Kenntnis der Metrik genügt, um eine Kugelschale zu bauen.

Bausatz für eine Kugel



Polar-Koordinaten-Raum der Oberfläche einer Kugel mit Radius eins. Die Koordinatenfläche ist mit einer groben Triangulierung überzogen. Man kann jeder Kante des Gitternetzes zunächst die Koordinaten (θ, ϕ) zuordnen, z.B. als Koordinate des Kantenmittelpunkts, siehe das Quadrat oben links. Danach erhält jede Kante eine Länge $ds = (\Delta\theta^2 + \sin^2(\theta)\Delta\phi^2)^{1/2}$. Im vorliegenden Beispiel können $\Delta\phi$ und $\Delta\theta$ die Werte null oder $\pi/4$ annehmen. Steckt man die so skalierten Kanten zusammen, erhält man eine diskrete Approximation der Kugeloberfläche.

Die Koordinatenwahl auf der Fläche ist willkürlich.



$$ds^2 = E(u,v)\, du^2 + F(u,v)\, du\, dv + G(u,v)\, dv^2$$

Fläche "eingebettet" in $\mathbf{R}^3$,

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ dx &= \tfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\, du + \tfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\, dv \quad \text{usw.} \quad \rightsquigarrow \quad E, F, G \end{aligned}$$

Intrinsische Eigenschaften einer Fläche = Eigenschaften, die nur von der Metrik abhängen.

Beispiel: Papier zum Zylinder aufrollen, Metrik ändert sich nicht, intrinsische Eigenschaften ändern sich nicht.
$\rightarrow$ Modell zeigen

Wichtigste intrinsische Größe: Menge aller *Geodäten.*

Geodäte = "kürzeste Verbindung" zwischen zwei (hinreichend dicht benachbarten) Punkten.

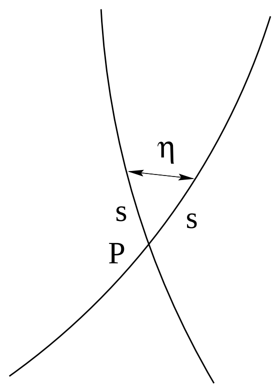
$\rightarrow$ Tesaband auf Kürbis oder Schwimmreifen

Formal:

$$\int_A^B ds = \text{extremal} \quad \rightarrow \quad \text{Variationsrechnung}$$

Wichtig: Es gibt genau eine Geodäte durch einen gegebenen Punkt mit vorgegebener Richtung!

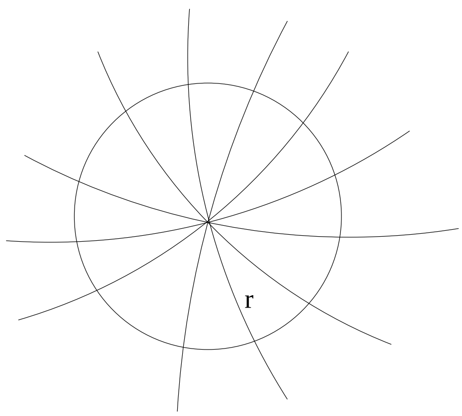
Definition der Gaußschen Krümmung:



$$K = -\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{\eta}\,\frac{d^2\eta}{ds^2}\right) .$$

$\eta =$ Distanz zweier benachbarter Geodäten durch P im Abstand s von P.

Äquivalente Definition:



$$K = \frac{3}{\pi}\lim_{r\to 0}\left(\frac{2\pi r - C}{r^3}\right) .$$

$C =$ Umfang eines Kreises um P mit Radius r. Diesen konstruiert man, indem man alle Geodäten durch P zeichnet und im

Abstand r von P markiert.

1.2 Riemannsche Geometrie

n-dimensionale *Mannigfaltigkeit* von Punkten P mit Koordinaten $x(P) = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Metrik:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

$g_{ij}(x)$ symmetrische Matrix mit $n(n+1)/2$ unabhängigen Komponenten.

Dimension	Anzahl unabhängige Komponenten
2	3
3	6
4	10

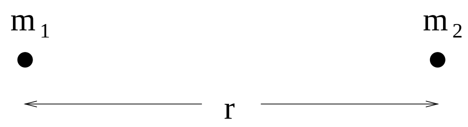
Geodäten definiert wie für $n = 2$.

Die Krümmung ist kein *Skalar* mehr, sondern ein *Tensor*, d.h. ein Objekt mit mehreren Indizes und einem bestimmten Verhalten bei Wechsel des Koordinatensystems.

Riemannscher Krümmungstensor $R^i{}_{jkl}$ hat 256 Komponenten in $n = 4$, davon 20 unabhängig.

Räume konstanter Krümmung (z.B. Kugeloberflächen) gibt es für alle n.

1.3 Newtonsche Gravitationstheorie



$$F = \frac{G\, m_1\, m_1}{r^2} \quad \text{immer anziehend}$$

Puzzle 1: Elektrostatik: zwei Ladungen Q und q

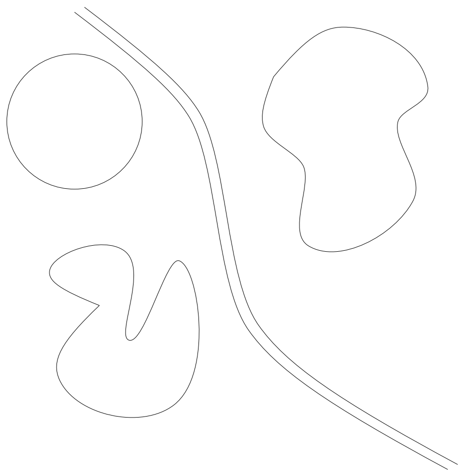
$$F = \frac{Q\, q}{r^2} = m\, a \quad \rightsquigarrow \quad a = \frac{Q\, q}{m\, r^2}$$

Newtonsche Gravitation: zwei Massen M und m

$$F = \frac{G\, Mm}{r^2} = m\, a \quad \rightsquigarrow \quad a = \frac{G\, m}{r^2}$$

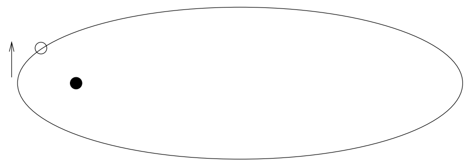
Prinzip von Galilei: Die Gravitationsladung eines Teilchens $\mathbf{m}$ ($F = G\, M\, \mathbf{m}/r^2$) und seine *träge* Masse ($F = \mathbf{m}\, a$) sind identisch: Ein Piano und ein Pingpong-Ball fliegen in einem äußeren

Gravitationsfeld auf dem gleichen Orbit (in Raum *und* Zeit), wenn sie mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit (nach Betrag und Richtung) gestartet sind.



WARUM?

Puzzle 2:



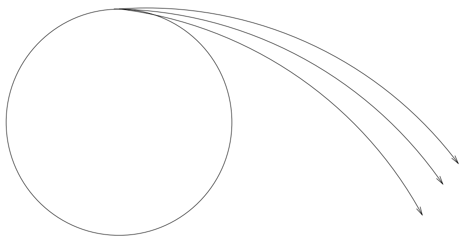
Periheldrehung des Merkur (40” in 100 Jahren) kann nicht im Rahmen der Newtonschen Theorie erklärt werden (Leverrier 1846).

ART löst Puzzle 1 und Puzzle 2 (und auch viele andere Probleme).

1.4 Szenario zur Erfindung der ART

Idee: Galileis Prinzip $\rightsquigarrow$ Raum hat (gekrümmte) "Schienen".

Hypothese 1: Teilchenbahnen sind Geodäten im Ortsraum



tangentialer Abwurf
gleiche Richtung
verschiedene Geschwindigkeit

Bahnen können nicht Geodäten sein, da es nur *eine* Geodäte durch P mit vorgegebener Richtung geben kann.
Bahnen sind durch Anfangsgeschwindigkeiten $(dx/dt, dy/dt, dz/dt)$ festgelegt $\rightsquigarrow$ Richtung in *Raum-Zeit* (dx, dy, dz, dt).
Piano und Pingpong-Ball haben gleiche Bahn in Raum-Zeit (*Weltlinie*). Koordinaten (x, y, z, t).

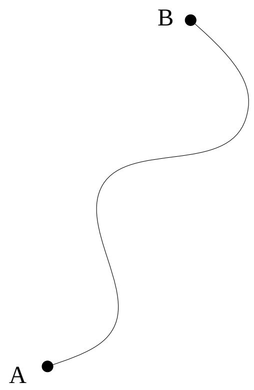
Hypothese 2: Teilchenbahnen sind Geodäten in Raum-Zeit, versehen mit einer geeigneten Metrik.

Erster Versuch:

$$ds^2 = \phi\, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (M1)$$

$[\phi]$ = Quadrat einer Geschwindigkeit

Hamilton 1835: Formulierung der Newtonschen Mechanik als Variationsproblem:



$$\text{Bahn so, daß} \quad \int_A^B dt\,(T-U) = \text{ extremal}$$

$T=$ kinetische Energie

$U=$ potentielle Energie

Test-Teilchen im Gravitationspotential ϕ:

$$\int_A^B dt\,\left(\frac{1}{2}\,v^2 - \phi\right) = \text{ extremal} \qquad (A)$$

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \quad \rightsquigarrow \quad ds^2 = dt^2\,\left(\phi + v^2\right)$$

Geodätengleichung $\int_A^B ds = \int_A^B dt\,(\phi{+}v^2)^{1/2} =$ extremal $\qquad (B)$

Leider: $(A) \neq (B)$. Außerdem: $\phi = 0 \rightsquigarrow (M1)$ dreidimensional. Wissen aber, daß bei Abwesenheit von Gravitation die Geodäten Geraden in Raum-Zeit sind.

<u>Zweiter Versuch:</u>

$$ds^2 = \left(V^2 - 2\phi\right)\, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (M2)$$

$$\int_A^B ds = \int_A^B dt\, \left(V^2 - 2\phi + v^2\right)^{1/2} = \text{ extremal} \qquad (C)$$

$V >> v^2$ und $V >> \phi \quad \rightsquigarrow$

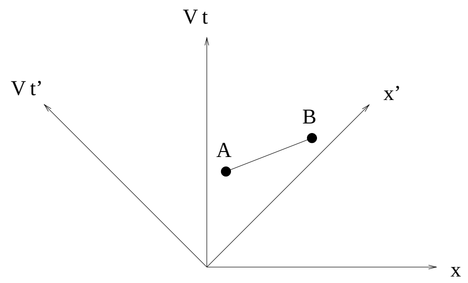
$$\left(V^2 - 2\phi + v^2\right)^{1/2} \approx \frac{1}{V}\left(V^2 + \underbrace{\frac{1}{2}v^2 - \phi}_{(T-U)_{\text{Newton}}}\right)$$

V^2: irrelevante additive Konstante

$\rightsquigarrow$ Geodäten von $(M2) \approx$ Newtonsche Bahnen!

Aber: $(M2)$ verletzt die Kausalität!
$\phi = 0$: $ds^2 = V^2\, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Zweites Koordinatensystem (Vt', x', y', z') durch Rotation in Raum-Zeit, gleichberechtigt.



in (Vt, x): A zeitlich vor B in (Vt', x'): A zeitlich nach B
Das geht nicht an!

Letzter, drastischer Versuch:

$$ds^2 = \left(V^2 + 2\phi\right)\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (M3)$$

$\rightsquigarrow$ Geodäten $\approx$ Newtonsche Bahnen

$\rightsquigarrow$ keine Kausalitätsprobleme (siehe später)

$(M3)$ ist indefinit, d.h. ein Abstand kann negativ sein!

1.5 Spezielle Relativitätstheorie

$\phi = 0$, $V = c =$ Lichtgeschwindigkeit, gleich in allen Bezugssystemen.

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

1.6 Gleichungen der ART

Allgemeine Metrik für Raum-Zeit-Koordinaten (x^0, x^1, x^2, x^3) mit Signatur $(+, -, -, -)$.

Metrik:

$$ds^2 = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

g_{ij} ist das Gravitationsfeld.

Feldgleichungen für die g_{ij} bei gegebenen Masse- bzw. Energieverteilung (Quelle des Gravitationsfeldes).

Bewegungsgleichungen für Teilchen (Geodätengleichungen).

Es ergibt sich (M3) als Newtonsche Näherung der ART.

Bewegungsgleichungen für Testpartikel:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

Definition der Christoffel-Symbole:

$$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^m{}_{kl} &= g^{mi}\,\Gamma_{ikl} \\ g^{ij}g_{jk} &= \delta^i{}_k \end{aligned}$$

Einstein-Gleichungen für die Metrik:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}\,g_{ik}\,R = -\kappa\,T_{ik}$$

Ricci-Tensor und Krümmungsskalar:

$$\begin{aligned} R_{ik} &= R^h{}_{ikh} \\ R &= R_{ik}\,g^{ik} \end{aligned}$$

Riemannscher Krümmungstensor:

$$R^r{}_{ikj} = \Gamma^r{}_{ij,k} - \Gamma^r{}_{ik,j} + \Gamma^r{}_{mk}\,\Gamma^m{}_{ij} - \Gamma^r{}_{mj}\,\Gamma^m{}_{ik}$$

$$B^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot,k} = \frac{\partial B^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}}{\partial x^k}$$

$T_{ik} =$ spurfreier Energie-Impuls-Tensor der Materie