Einführung in die Relativitätstheorie

Skript zur Vorlesung im WS 97/98

Klaus Pinn
Institut für Theoretische Physik I
Universität Münster

Vorbemerkung

Das vorliegende Skriptum soll weder Lehrbücher noch Vorlesungen ersetzen, sondern lediglich das von vielen Studenten als mühsam und ablenkend empfundenen Mitschreiben unnötig machen.

Im wesentlichen steht im Skript genau das, was auch an die Tafel geschrieben wurde. Es fehlen natürlich die ausführlichen Erläuterungen und Ergänzungen der mündlichen Vorlesung.

Als Quellen wurden überwiegend die Bücher von Sexl/Urbantke benutzt. Kapitel 13 und 14 lehnen sich an die Vorlesung von Prof. Münster im WS 90/91 an.

Das Skript enthält sicherlich noch Druckfehler und vielleicht auch inhaltliche Ungenauigkeiten oder sogar Irrtümer. Diesbezügliche Hinweise sind mir jederzeit willkommen.

Klaus Pinn

`http://PLANCK.UNI-MUENSTER.DE:8080/~pinn/`

`email: pinn@uni-muenster.de`

Inhaltsverzeichnis

Literaturhinweise

Spezielle Relativitätstheorie

U.E. Schröder, *Spezielle Relativitätstheorie*,
Harri Deutsch, Thun

R.U. Sexl, H.K. Schmidt, *Raum - Zeit - Relativität*,
Vieweg, Braunschweig

H. und M. Ruder, *Die Spezielle Relativitätstheorie*,
Vieweg

R.U. Sexl, H.K. Urbantke, *Relativität Gruppen Teilchen*,
Springer, Wien

Allgemeine Relativitätstheorie

M. Berry, *Kosmologie und Gravitation*,
Teubner, Stuttgart

R.U. Sexl, H.K. Urbantke, *Gravitation und Kosmologie*,
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg

T. Fließbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*,
Spektrum Akademischer Verlag

P.A.M. Dirac, *General Theory of Relativity*,
John Wiley & Sons, New York

S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*,
John Wiley & Sons

C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*,
Freeman, San Francisco

1 Ist die Welt ein Kürbis?

(frei nach Wolfgang Rindler, Am. J. Phys. 62 (1994) 887)

SRT: Einstein 1905
$\Downarrow$ Verallgemeinerung
ART: Einstein 1915

Hätte es auch anders herum passieren können?
Z.B. so:
ART: Riemann 1860
$\Downarrow$ Spezialisierung
SRT: 1860

neue Theorie = Antwort auf Schwierigkeiten (Widerspruch zum Experiment), Paradoxa, Puzzles in älteren Theorien

Beispiele:

- Newtonsche Mechanik in Konflikt mit der klassischen Elektrodynamik: Maxwell-Gleichungen sind nicht forminvariant unter Galilei-Transformation. Lösung: SRT
- Puzzle: Wieso sind schwere und träge Masse gleich groß? Lösung: ART

Zwei bedeutende Ereignisse im Jahre **1854**:

- Die Eisenbahn erreicht Göttingen.
- Habilitation von *Bernhard Riemann* (1826-1866): Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen".

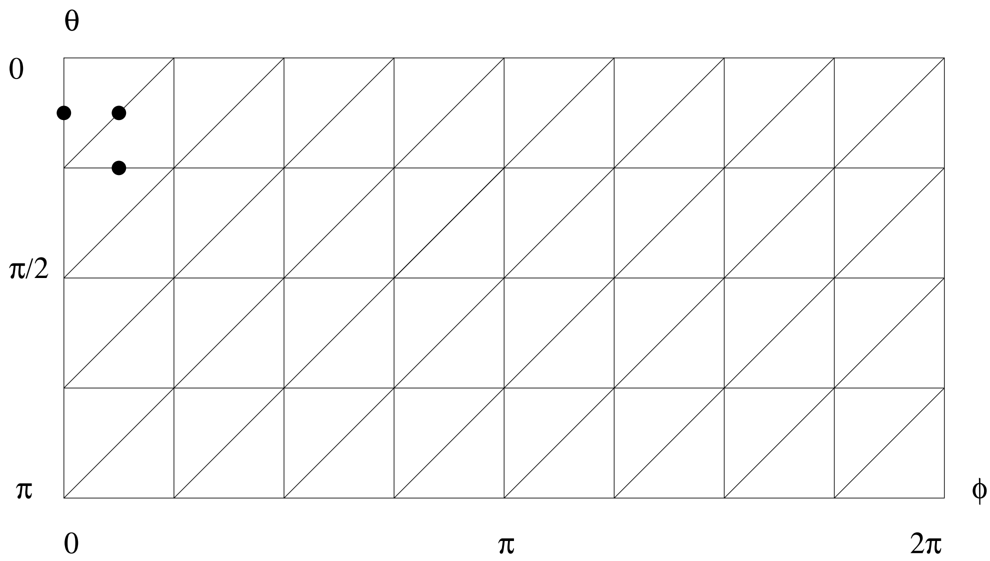
1.1 Geometrie 2-dimensionaler Flächen

Karl Friedrich Gauß (1777-1855):
Differentialgeometrie von 2-dimensionalen Flächen.
Zentraler Begriff: *Metrik* = Formel, die den Abstand ds zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten angibt.
Beispiel: Oberfläche einer Kugel mit Radius R.

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2 \right) \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \quad \text{Polarwinkel} \\ 0 &\leq \phi \leq 2\pi \quad \text{Azimutalwinkel} \end{aligned}$$

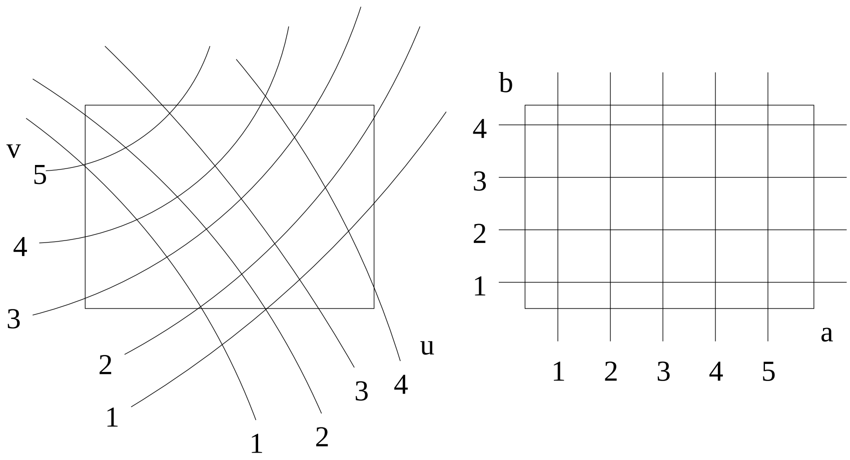
Die Kenntnis der Metrik genügt, um eine Kugelschale zu bauen.

Bausatz für eine Kugel



Polar-Koordinaten-Raum der Oberfläche einer Kugel mit Radius eins. Die Koordinatenfläche ist mit einer groben Triangulierung überzogen. Man kann jeder Kante des Gitternetzes zunächst die Koordinaten (θ, ϕ) zuordnen, z.B. als Koordinate des Kantenmittelpunkts, siehe das Quadrat oben links. Danach erhält jede Kante eine Länge $ds = (\Delta\theta^2 + \sin^2(\theta)\Delta\phi^2)^{1/2}$. Im vorliegenden Beispiel können $\Delta\phi$ und $\Delta\theta$ die Werte null oder $\pi/4$ annehmen. Steckt man die so skalierten Kanten zusammen, erhält man eine diskrete Approximation der Kugeloberfläche.

Die Koordinatenwahl auf der Fläche ist willkürlich.



$$ds^2 = E(u,v)\,du^2 + F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2$$

Fläche "eingebettet" in $\mathbf{R}^3$,

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ dx &= \tfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,du + \tfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\,dv \quad \text{usw.} \quad \rightsquigarrow \quad E, F, G \end{aligned}$$

Intrinsische Eigenschaften einer Fläche = Eigenschaften, die nur von der Metrik abhängen.

Beispiel: Papier zum Zylinder aufrollen, Metrik ändert sich nicht, intrinsische Eigenschaften ändern sich nicht.
$\rightarrow$ Modell zeigen

Wichtigste intrinsische Größe: Menge aller *Geodäten.*

Geodäte = "kürzeste Verbindung" zwischen zwei (hinreichend dicht benachbarten) Punkten.

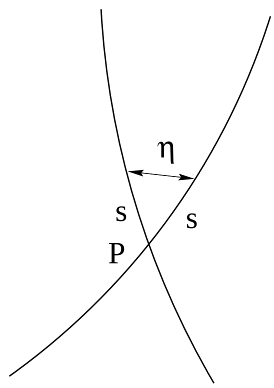
$\rightarrow$ Tesaband auf Kürbis oder Schwimmreifen

Formal:

$$\int_A^B ds = \text{extremal} \quad \rightarrow \quad \text{Variationsrechnung}$$

Wichtig: Es gibt genau eine Geodäte durch einen gegebenen Punkt mit vorgegebener Richtung!

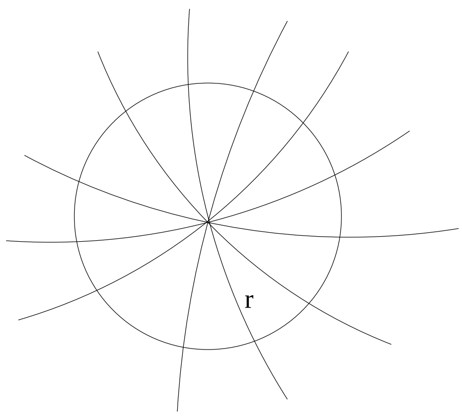
Definition der Gaußschen Krümmung:



$$K = -\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{\eta}\,\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)\ .$$

$\eta =$ Distanz zweier benachbarter Geodäten durch P im Abstand s von P.

Äquivalente Definition:



$$K = \frac{3}{\pi}\lim_{r\to 0}\left(\frac{2\pi r - C}{r^3}\right)\ .$$

$C =$ Umfang eines Kreises um P mit Radius r. Diesen konstruiert man, indem man alle Geodäten durch P zeichnet und im

Abstand r von P markiert.

1.2 Riemannsche Geometrie

n-dimensionale *Mannigfaltigkeit* von Punkten P mit Koordinaten $x(P) = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Metrik:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

$g_{ij}(x)$ symmetrische Matrix mit $n(n+1)/2$ unabhängigen Komponenten.

Dimension	Anzahl unabhängige Komponenten
2	3
3	6
4	10

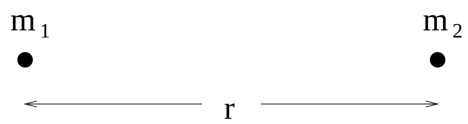
Geodäten definiert wie für $n = 2$.

Die Krümmung ist kein *Skalar* mehr, sondern ein *Tensor*, d.h. ein Objekt mit mehreren Indizes und einem bestimmten Verhalten bei Wechsel des Koordinatensystems.

Riemannscher Krümmungstensor $R^i{}_{jkl}$ hat 256 Komponenten in $n = 4$, davon 20 unabhängig.

Räume konstanter Krümmung (z.B. Kugeloberflächen) gibt es für alle n.

1.3 Newtonsche Gravitationstheorie



$$F = \frac{G\, m_1\, m_1}{r^2} \quad \text{immer anziehend}$$

<u>Puzzle 1:</u> Elektrostatik: zwei Ladungen Q und q

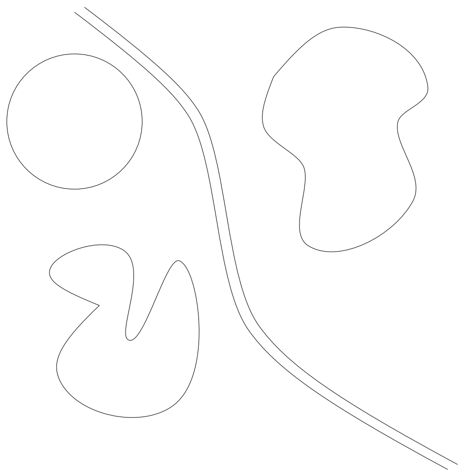
$$F = \frac{Q\, q}{r^2} = m\, a \quad \rightsquigarrow \quad a = \frac{Q\, q}{m\, r^2}$$

Newtonsche Gravitation: zwei Massen M und m

$$F = \frac{G\, M m}{r^2} = m\, a \quad \rightsquigarrow \quad a = \frac{G\, m}{r^2}$$

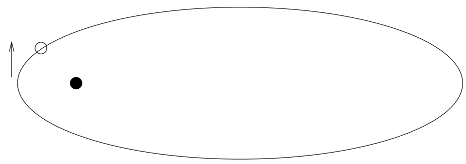
<u>Prinzip von Galilei:</u> Die Gravitationsladung eines Teilchens $\mathbf{m}$ ($F = G\, M\, \mathbf{m}/r^2$) und seine *träge* Masse ($F = \mathbf{m}\, a$) sind identisch: Ein Piano und ein Pingpong-Ball fliegen in einem äußeren

Gravitationsfeld auf dem gleichen Orbit (in Raum *und* Zeit), wenn sie mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit (nach Betrag und Richtung) gestartet sind.



WARUM?

<u>Puzzle 2:</u>



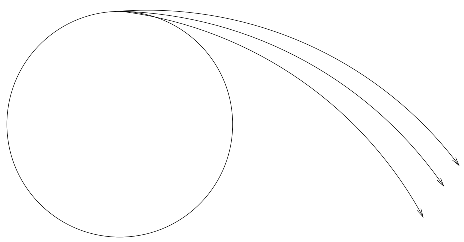
Periheldrehung des Merkur (40" in 100 Jahren) kann nicht im Rahmen der Newtonschen Theorie erklärt werden (Leverrier 1846).

ART löst Puzzle 1 und Puzzle 2 (und auch viele andere Probleme).

1.4 Szenario zur Erfindung der ART

Idee: Galileis Prinzip $\rightsquigarrow$ Raum hat (gekrümmte) "Schienen".

Hypothese 1: Teilchenbahnen sind Geodäten im Ortsraum



tangentialer Abwurf
gleiche Richtung
verschiedene Geschwindigkeit

Bahnen können nicht Geodäten sein, da es nur *eine* Geodäte durch P mit vorgegebener Richtung geben kann.
Bahnen sind durch Anfangsgeschwindigkeiten $(dx/dt, dy/dt, dz/dt)$ festgelegt $\rightsquigarrow$ Richtung in *Raum-Zeit* (dx, dy, dz, dt).
Piano und Pingpong-Ball haben gleiche Bahn in Raum-Zeit (*Welt-linie*). Koordinaten (x, y, z, t).

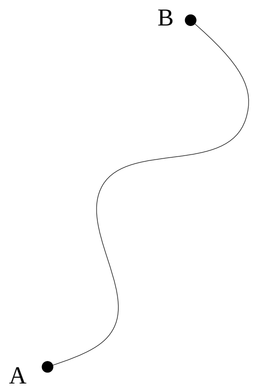
Hypothese 2: Teilchenbahnen sind Geodäten in Raum-Zeit, versehen mit einer geeigneten Metrik.

Erster Versuch:

$$ds^2 = \phi \, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (M1)$$

$[\phi]$ = Quadrat einer Geschwindigkeit

Hamilton 1835: Formulierung der Newtonschen Mechanik als Variationsproblem:



$$\text{Bahn so, daß} \quad \int_A^B dt \, (T - U) = \text{ extremal}$$

T= kinetische Energie

U= potentielle Energie

Test-Teilchen im Gravitationspotential ϕ:

$$\int_A^B dt \, \left(\frac{1}{2} \, v^2 - \phi \right) = \text{ extremal} \qquad (A)$$

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \quad \rightsquigarrow \quad ds^2 = dt^2 \, \left(\phi + v^2\right)$$

Geodätengleichung $\int_A^B ds = \int_A^B dt\,(\phi{+}v^2)^{1/2} =$ extremal $\qquad (B)$

Leider: $(A) \neq (B)$. Außerdem: $\phi = 0 \rightsquigarrow (M1)$ dreidimensional. Wissen aber, daß bei Abwesenheit von Gravitation die Geodäten Geraden in Raum-Zeit sind.

<u>Zweiter Versuch:</u>

$$ds^2 = \left(V^2 - 2\phi\right)\, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (M2)$$

$$\int_A^B ds = \int_A^B dt\, \left(V^2 - 2\phi + v^2\right)^{1/2} = \text{ extremal} \qquad (C)$$

$V >> v^2$ und $V >> \phi \quad \rightsquigarrow$

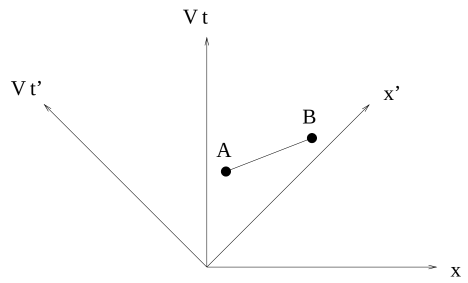
$$\left(V^2 - 2\phi + v^2\right)^{1/2} \approx \frac{1}{V} \left(V^2 + \underbrace{\frac{1}{2}v^2 - \phi}_{(T-U)_{\text{Newton}}} \right)$$

V^2: irrelevante additive Konstante

$\rightsquigarrow$ Geodäten von $(M2) \approx$ Newtonsche Bahnen!

Aber: $(M2)$ verletzt die Kausalität!
$\phi = 0$: $ds^2 = V^2\, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Zweites Koordinatensystem (Vt', x', y', z') durch Rotation in Raum-Zeit, gleichberechtigt.



in (Vt, x): A zeitlich vor B in (Vt', x'): A zeitlich nach B
Das geht nicht an!

Letzter, drastischer Versuch:

$$ds^2 = \left(V^2 + 2\phi\right)\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (M3)$$

$\rightsquigarrow$ Geodäten $\approx$ Newtonsche Bahnen

$\rightsquigarrow$ keine Kausalitätsprobleme (siehe später)

$(M3)$ ist indefinit, d.h. ein Abstand kann negativ sein!

1.5 Spezielle Relativitätstheorie

$\phi = 0$, $V = c =$ Lichtgeschwindigkeit, gleich in allen Bezugssystemen.

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

1.6 Gleichungen der ART

Allgemeine Metrik für Raum-Zeit-Koordinaten (x^0, x^1, x^2, x^3) mit Signatur $(+, -, -, -)$.

Metrik:

$$ds^2 = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} g_{ij} \, dx^i \, dx^j$$

g_{ij} ist das Gravitationsfeld.

Feldgleichungen für die g_{ij} bei gegebenen Masse- bzw. Energieverteilung (Quelle des Gravitationsfeldes).

Bewegungsgleichungen für Teilchen (Geodätengleichungen).

Es ergibt sich (M3) als Newtonsche Näherung der ART.

Bewegungsgleichungen für Testpartikel:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

Definition der Christoffel-Symbole:

$$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^m{}_{kl} &= g^{mi}\,\Gamma_{ikl} \\ g^{ij}g_{jk} &= \delta^i{}_k \end{aligned}$$

Einstein-Gleichungen für die Metrik:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}\,g_{ik}\,R = -\kappa\,T_{ik}$$

Ricci-Tensor und Krümmungsskalar:

$$\begin{aligned} R_{ik} &= R^h{}_{ikh} \\ R &= R_{ik}\,g^{ik} \end{aligned}$$

Riemannscher Krümmungstensor:

$$R^r{}_{ikj} = \Gamma^r{}_{ij,k} - \Gamma^r{}_{ik,j} + \Gamma^r{}_{mk}\,\Gamma^m{}_{ij} - \Gamma^r{}_{mj}\,\Gamma^m{}_{ik}$$

$$B^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot,k} = \frac{\partial B^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}}{\partial x^k}$$

$T_{ik} =$ spurfreier Energie-Impuls-Tensor der Materie

2 Spezielle Relativitätstheorie in Bildern

(frei nach L.P. Staunton, H. van Dam, Am. J. Phys. 48 (1980) 807)

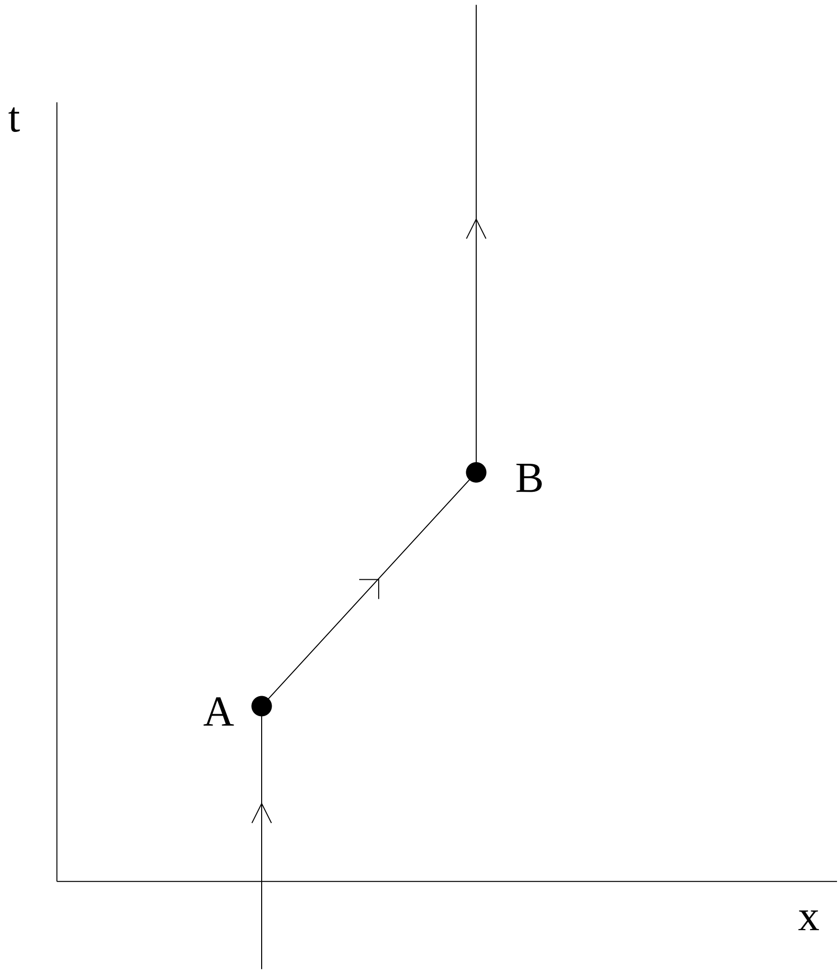


Bild 1: Raum-Zeit-Diagramm mit der *Weltlinie* eines Fußgängers. Dieser ruht zunächst, läuft dann mit konstanter Geschwindigkeit nach rechts und setzt sich wieder zur Ruhe. Punkte in einem solchen Diagramm nennt man *Ereignisse*.

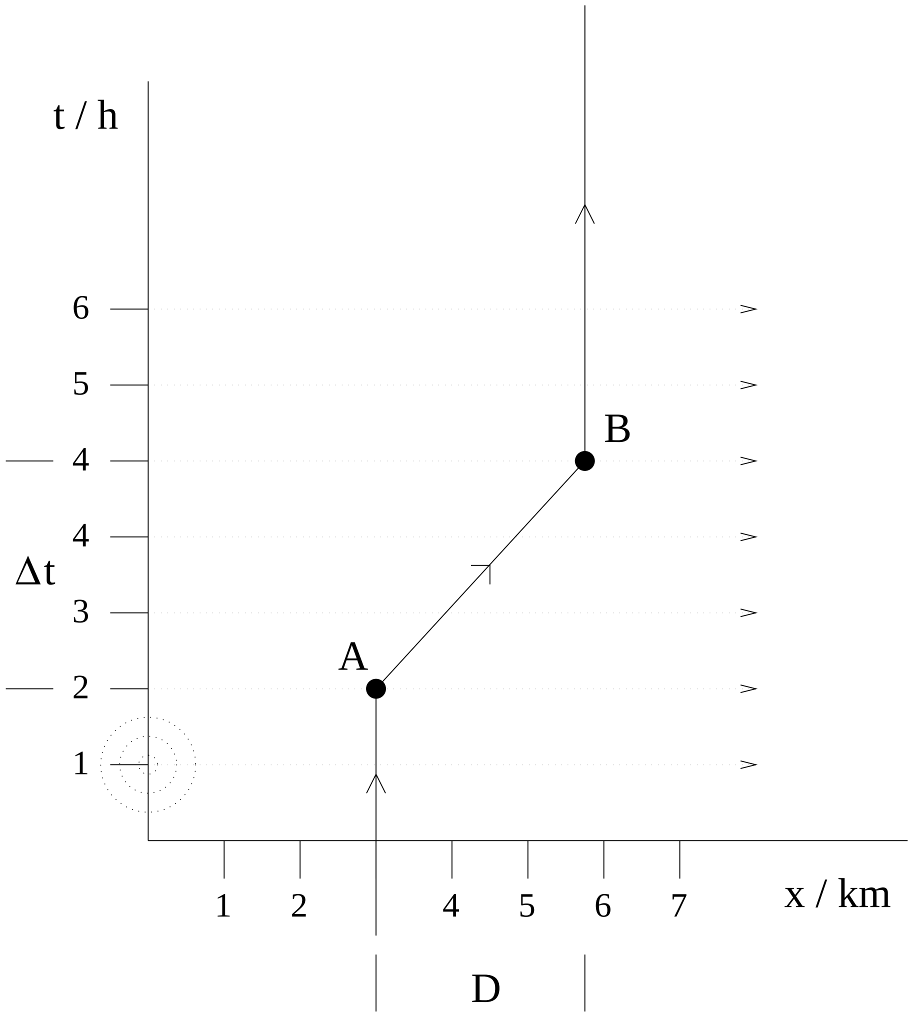


Bild 2. Raum-Zeit-Diagramm mit Einheiten in Stunden und Kilometern. Die gepunkteten Linien repräsentieren Radio-Signale von einer bei $x = 0$ ruhenden Uhr, die unser Spaziergänger empfangen kann. In der Zeit Δt legt er die Strecke D zurück. Seine Geschwindigkeit (Steigung der Weltlinie) ist daher $D/\Delta t$. Die endliche Lichtgeschwindigkeit bedeutet, daß die gepunkteten Linien eine endliche Steigung haben. Im Maßstab der Zeichnung ist dies nicht zu sehen.

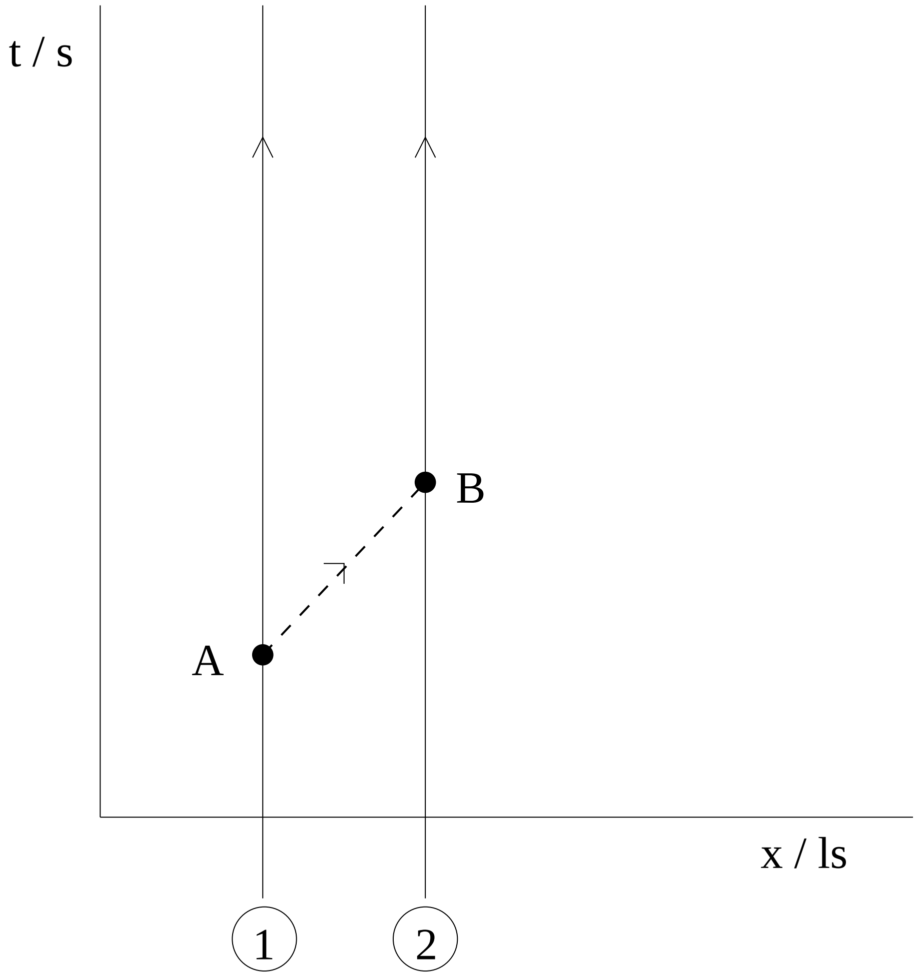


Bild 3. Raum-Zeit-Diagramm, mit Einheiten in Sekunden und Lichtsekunden. In diesen Einheiten haben Lichtsignale, repräsentiert durch gestrichelte Linien, eine Steigung von 45^o. Die Steigung der Weltlinien von Fußgängern in diesem Bild ist von 90^o nicht zu unterscheiden. Ereignis A: Beobachter 1 sendet einen Lichtblitz nach rechts. Ereignis B: Beobachter 2 empfängt den Lichtblitz. Beide Beobachter ruhen im Koordinatensystem (x,t).

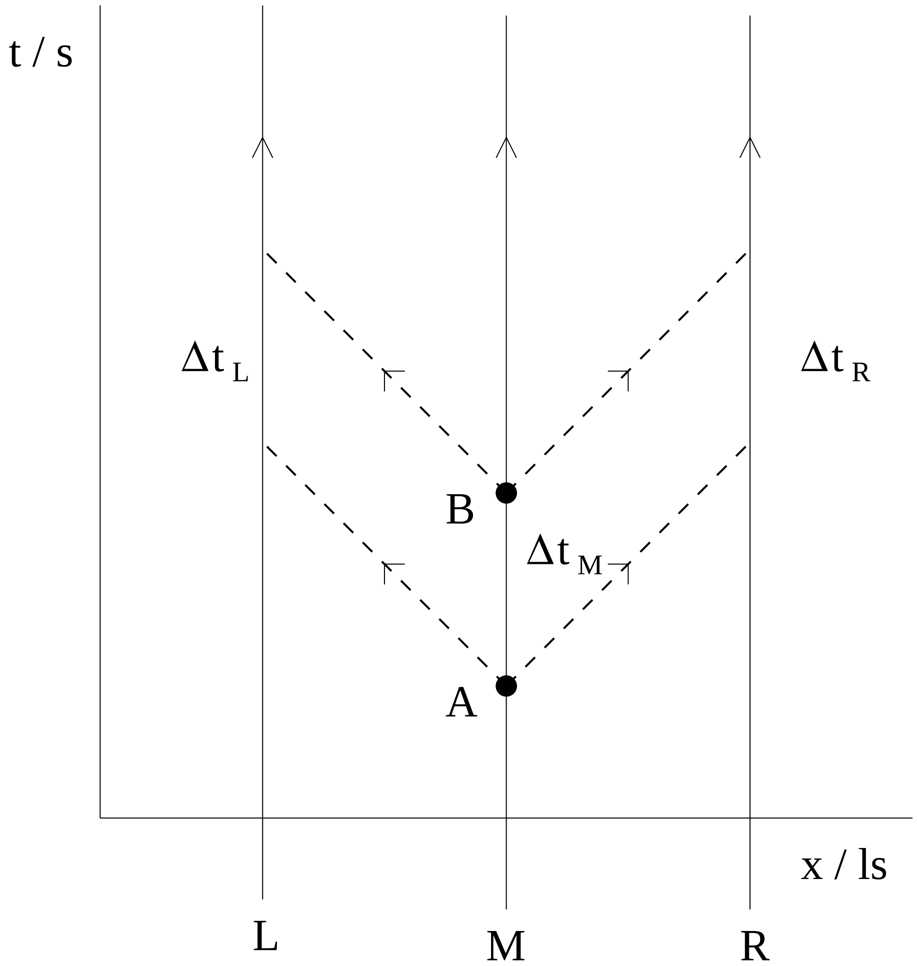


Bild 5. Raum-Zeit-Diagramm mit drei stationären Beobachtern L (links), M (Mitte) und R (rechts). M sendet im Abstand Δt_M Lichtblitze aus, gleichzeitig nach rechts und nach links (Ereignisse A und B). L und R registrieren die Blitze zeitverzögert. Das Zeitintervall zwischen erstem und zweitem Blitz ist jedoch für alle drei Beobachter gleich groß: $\Delta t_L = \Delta t_R = \Delta t_M$.

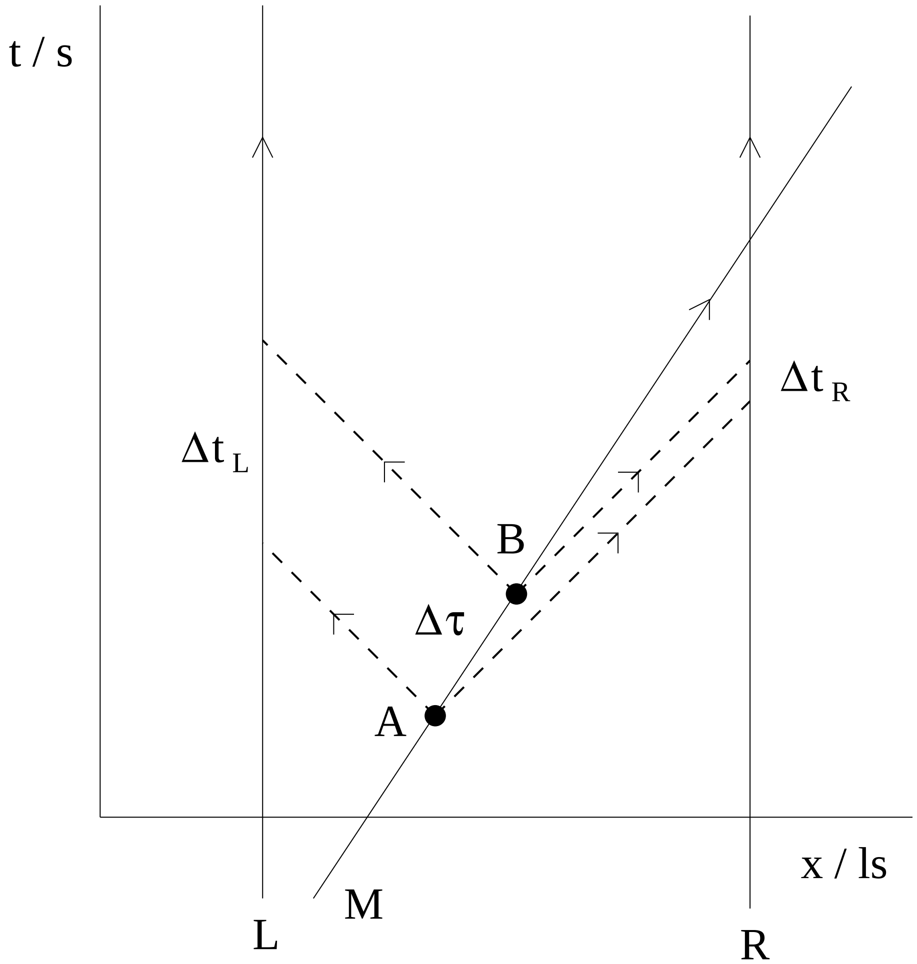


Bild 5. Raum-Zeit-Diagramm mit zwei stationären Beobachtern L, R und einem Beobachter M in schneller Bewegung. Mit zeitlichem Abstand $\Delta\tau$ (gemessen auf seiner *eigenen* Uhr) sendet M Lichtblitze aus. Die Tatsache, daß sich die Lichtsignale im Raum-Zeit-Diagramm nach wie vor auf Geraden mit Steigung 45^o ausbreiten, unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters M relativ zu L und R, ist das *Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit*. Der zeitliche Abstand zwischen den Blitzen ist jetzt für R kleiner, für L größer als für M: $\Delta t_R < \Delta\tau < \Delta t_L$. Das *Eigenzeitintervall* $\Delta\tau$ ist gegeben durch $\Delta\tau = \sqrt{\Delta t_L \cdot \Delta t_R}$.

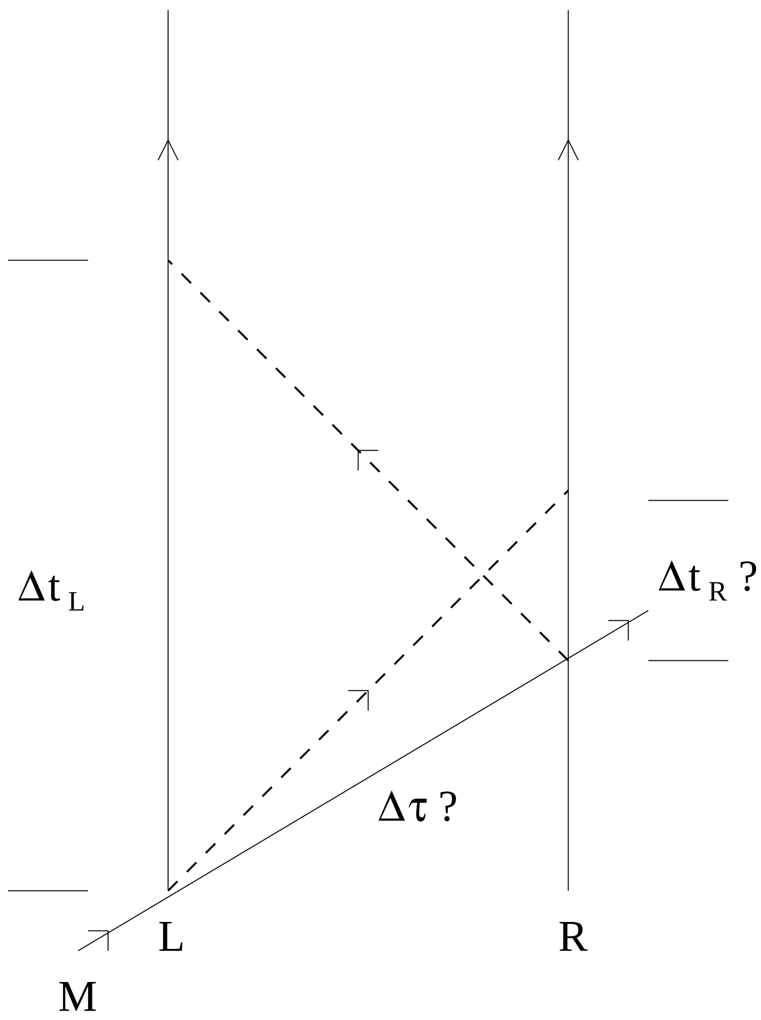


Bild 6. Hypothetisches Raum-Zeit-Diagramm eines Trips mit Überlichtgeschwindigkeit. M kommt auf seinem Trip bei dem ruhenden L vorbei. Dieser meldet dieses Ereignis an R durch Absenden eines Lichtblitzes nach rechts. Ebenso quittiert R das Vorbeifliegen von M durch einen Lichtblitz nach links. Diesen Blitz registriert L nach der Zeit Δt_L. Nichts ist ungewöhnlich. R hingegen sieht M an sich vorbeifliegen, bevor er ihn bei L vorbeikommen sieht. Dies geht nicht an. Das Eigenzeitintervall für M wäre übrigens rein imaginär!

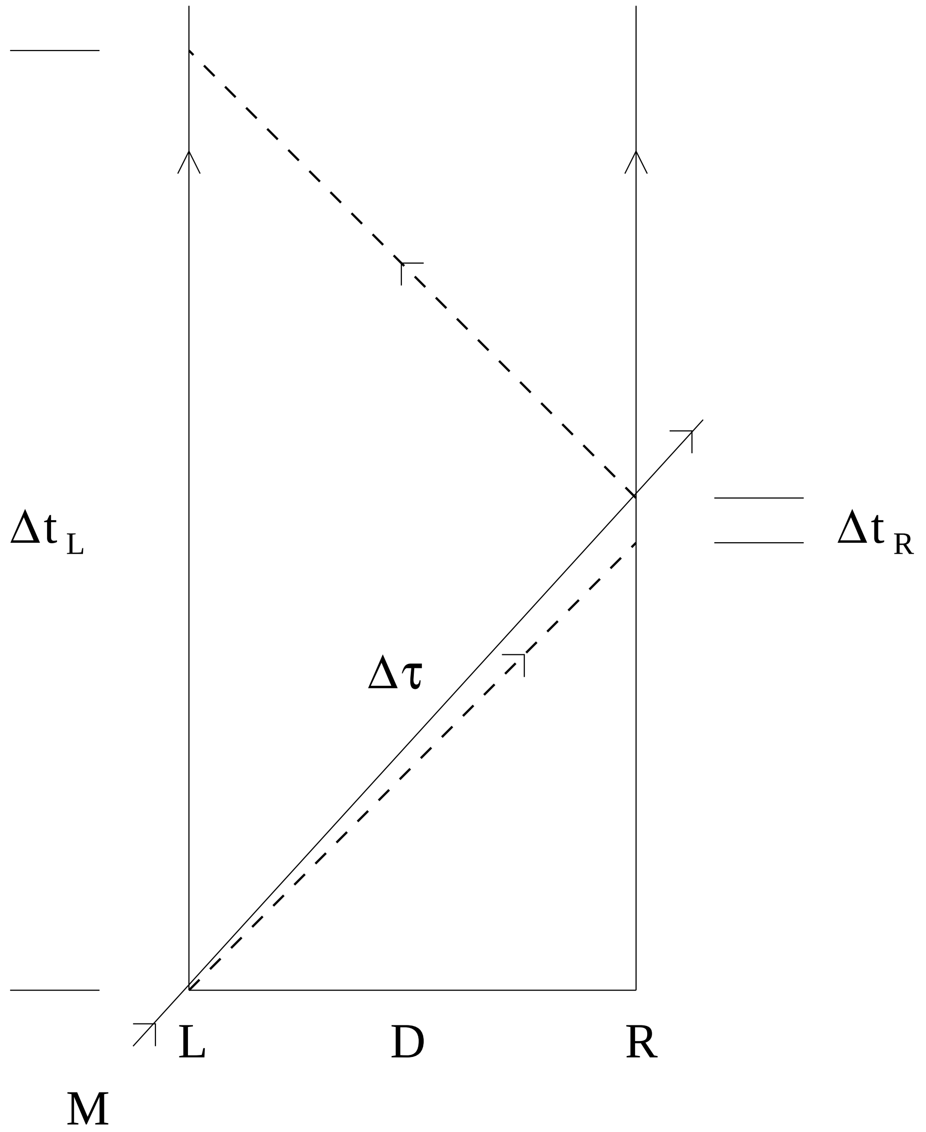


Bild 7. Raum-Zeit-Diagramm für einen Trip mit fast Lichtgeschwindigkeit. Der Lichtblitz braucht die Zeit D/c, um von von L nach R zu gelangen. Daher gilt $\Delta t_L = 2D/c + \Delta t_R$. Beispiel: $D = 7.5$ ls, $\Delta t_R = 1$ s. Daher $\Delta t_L = 16$ s. Auf der Uhr von M hingegen dauert die Reise von L nach M nur $\Delta\tau = \sqrt{\Delta t_L \cdot \Delta t_R} = 4$ s.

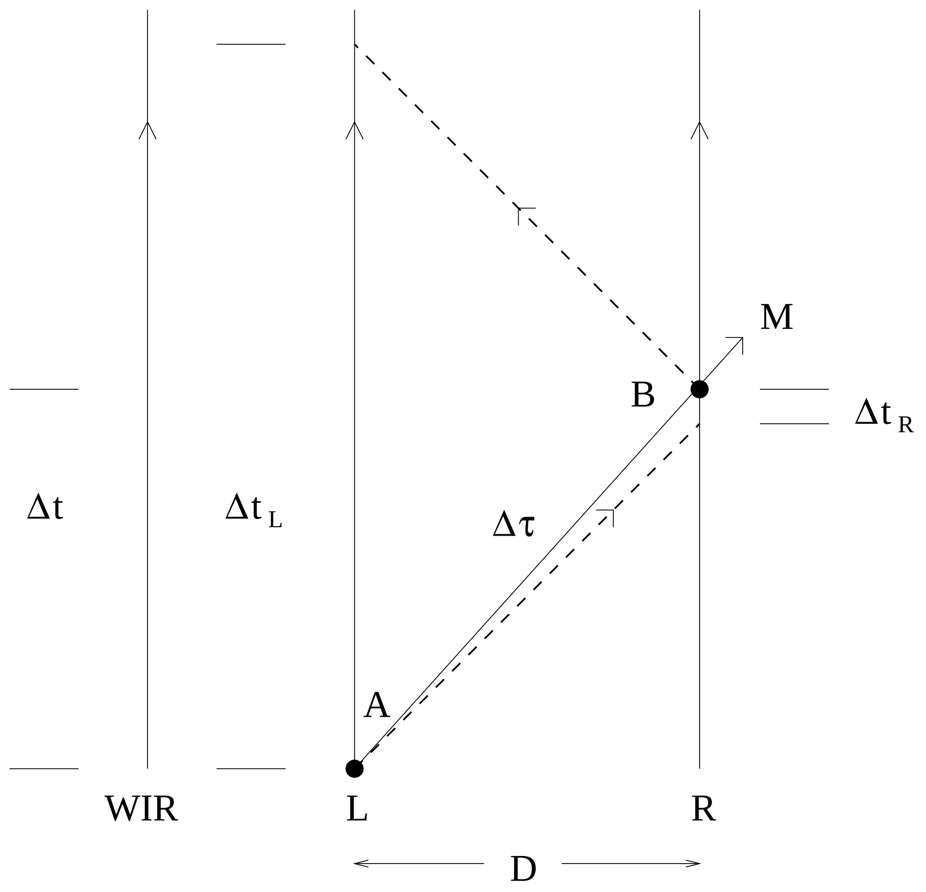


Bild 8. Trip-Zeit (vom Standpunkt WIR) versus Δt_L, Δt_R und Eigenzeitintervall $\Delta\tau$. WIR, L und R ruhen relativ zueinander. Zunächst synchronisieren wir unsere Uhren. Etwas später (Ereignis A) kommt M auf seiner schnellen Reise bei L vorbei. Dieser notiert seinen Uhrenstand. Das gleiche tut R beim Vorbeikommen von M. Die Differenz dieser beiden Zeiten ist die WIR-Zeit Δt. Später fragen wir M, wie lange er (nach seiner Uhr) für den Trip von L nach R gebraucht hat. Seine Antwort lautet $\Delta\tau = \Delta t\,\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

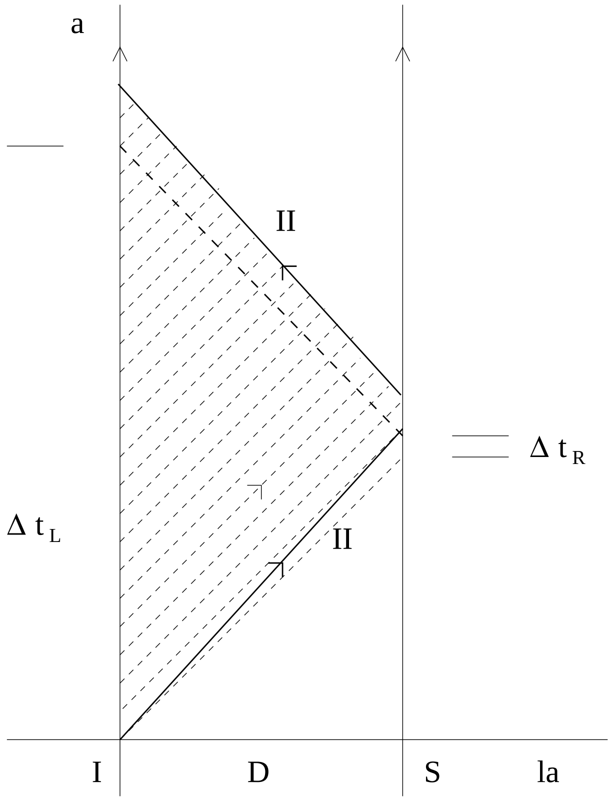


Bild 9. Graphische Darstellung des Zwillingsparadoxons. Zwilling II reist mit hoher Geschwindigkeit zum Sternsystem S. Der zurückbleibende Zwilling I schickt jährliche Geburtstagsgrüße per Funk (dünne gestrichelte Linien). II sendet lediglich eine Ankunftsbestätigung (dicke gestrichelte Linie). Ein Einwohner auf S konstatiert ein Zeitintervall $\Delta t_R = 1a$ zwischen Aufbruch und Ankunft von II auf S. L erhält allerdings erst nach $\Delta t_L = 21$ a Kunde von der sicheren Ankunft. Nach einem Jahr bricht II wieder zur Erde auf. Die Rückreise dauert aus der Sicht von I ein Jahr, so daß er II nach 23 Erdenjahren wieder begrüßt. Die verstrichene Eigenzeit für Zwilling II ist nur $2\sqrt{\Delta t_L \, \Delta t_R} + 1$ a $= 10.2$ a. Ein Paradoxon entsteht, wenn man fälschlicherweise annimmt, die Zwillinge seien gleichberechtigt. Zwar ist die Relativbewegung symmetrisch. II erfährt jedoch viermal heftige Beschleunigungen, während I die ganze Zeit in einem "Inertialsystem" ruht.

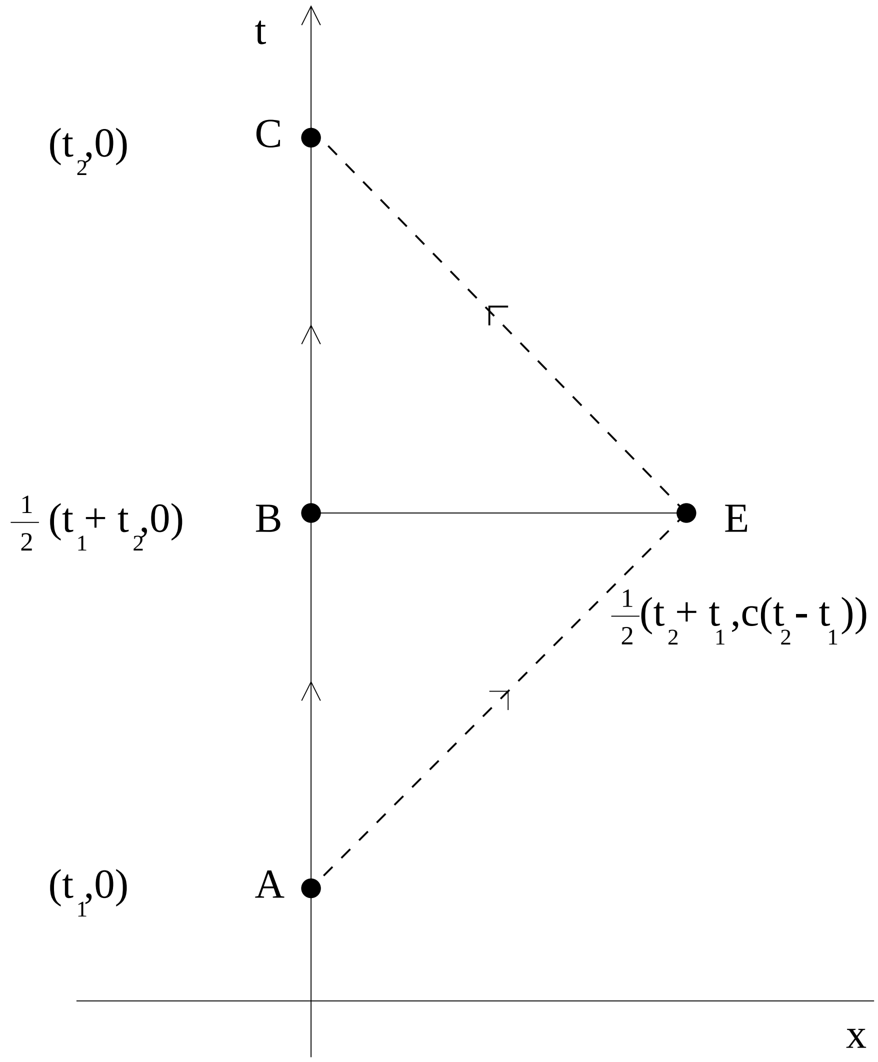


Bild 10. “Konstruktion” eines Raum-Zeit-Diagramms mit Uhr und Radar. Ein Beobachter O bestimmt die Koordinaten eines Ereignisses E, indem er die Zeit zwischen Aussenden und Empfang eines bei E reflektierten Radarsignals mißt. Aus einfachen Symmetrieüberlegungen folgt dann, daß E die Raum-Zeit-Koordinaten $\frac{1}{2}(t_2 + t_1, c(t_2 - t_1))$ hat.

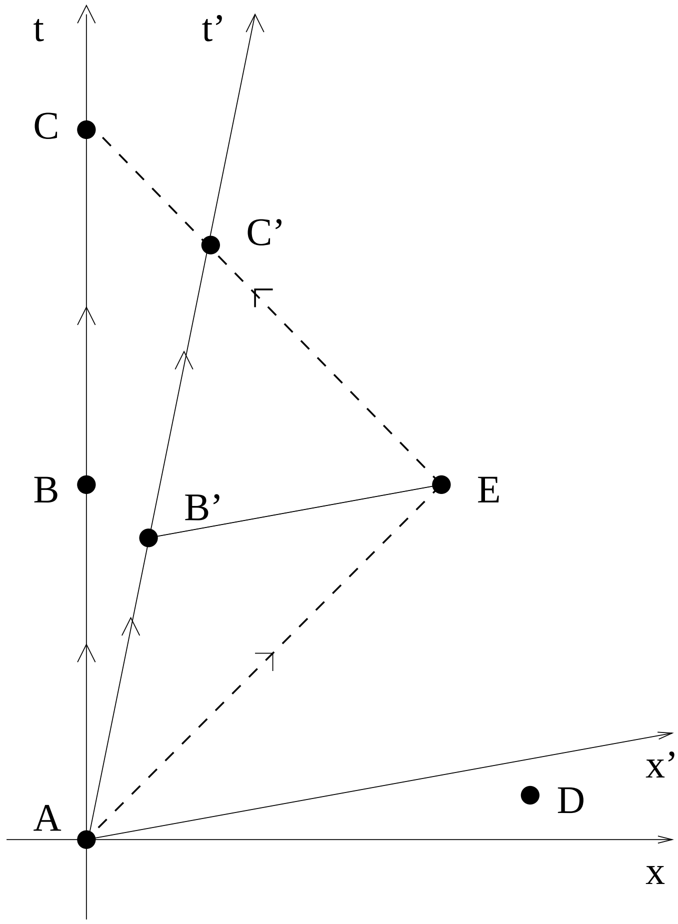


Bild 11. Raum-Zeit-Achsen eines bewegten Beobachters O', gezeichnet im ursprünglichen Koordinatensystem von O. O' benutzt ebenso wie O Radar und eine mitgeführte Uhr, um die Ereignisse zu "katalogisieren". Die Weltlinie von O' im System von O ist die t'-Achse. Beide schicken bei A ein Radarsignal aus. Die Echos erhalten sie bei C bzw. bei C'. Für O' ist das Ereignis B', auf halbem "Wege zu C", gleichzeitig mit E. Die Gerade B'E ist parallel zur x'-Achse. Gleichzeitigkeit ist relativ: Für O geschieht B' vor E, für O' sind B' und E gleichzeitig. Ebenso geschieht aus Sicht von O' B zeitlich nach E, während diese beiden Ereignisse für O gleichzeitig sind. Beim Ereignispaar A und D hängt sogar die zeitliche Reihenfolge vom Beobachter ab: Für O folgt D auf A, während für O' D dem Ereignis A vorausgeht.

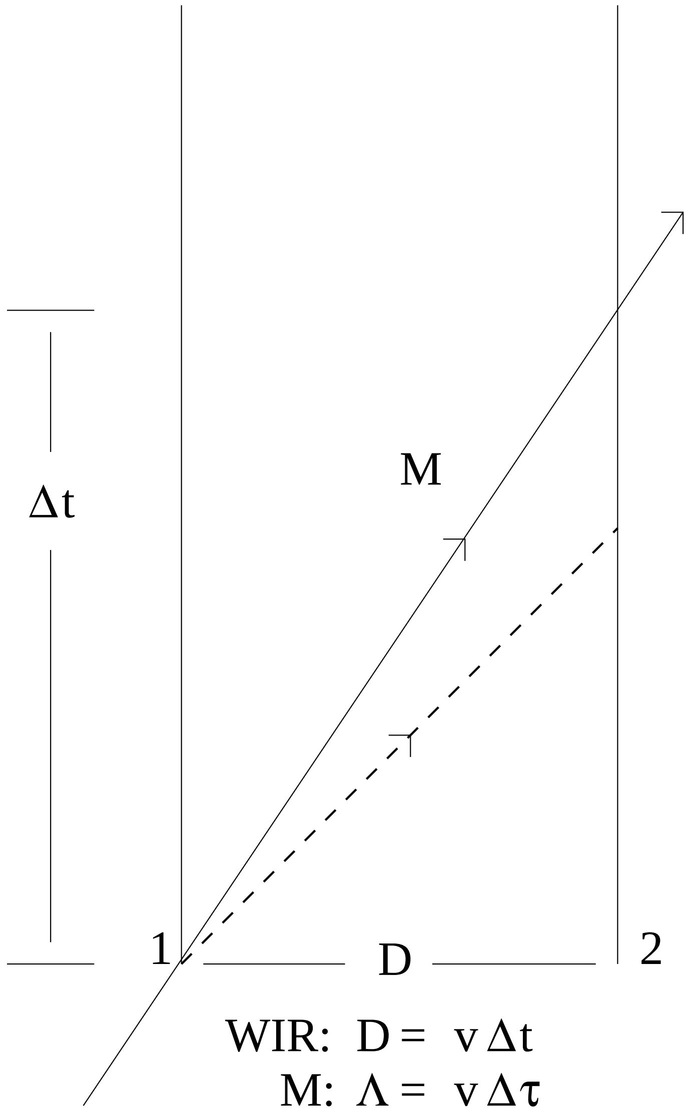


Bild 12. Messung des räumlichen Abstands zwischen zwei Objekten 1 und 2. In unserem Koordinatensystem hat der Beobachter M die Geschwindigkeit v. Er braucht die Zeit Δt, um von 1 nach 2 zu gelangen. Wir konstatieren daher $D = v\Delta t$. Für M selber hingegen verstreicht lediglich die Zeit $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Er wird daher zu dem Schluß kommen, daß der Abstand $\Lambda = D\sqrt{1 - v^2/c^2}$ beträgt. Dieses Phänomen nennt man Längenkontraktion.

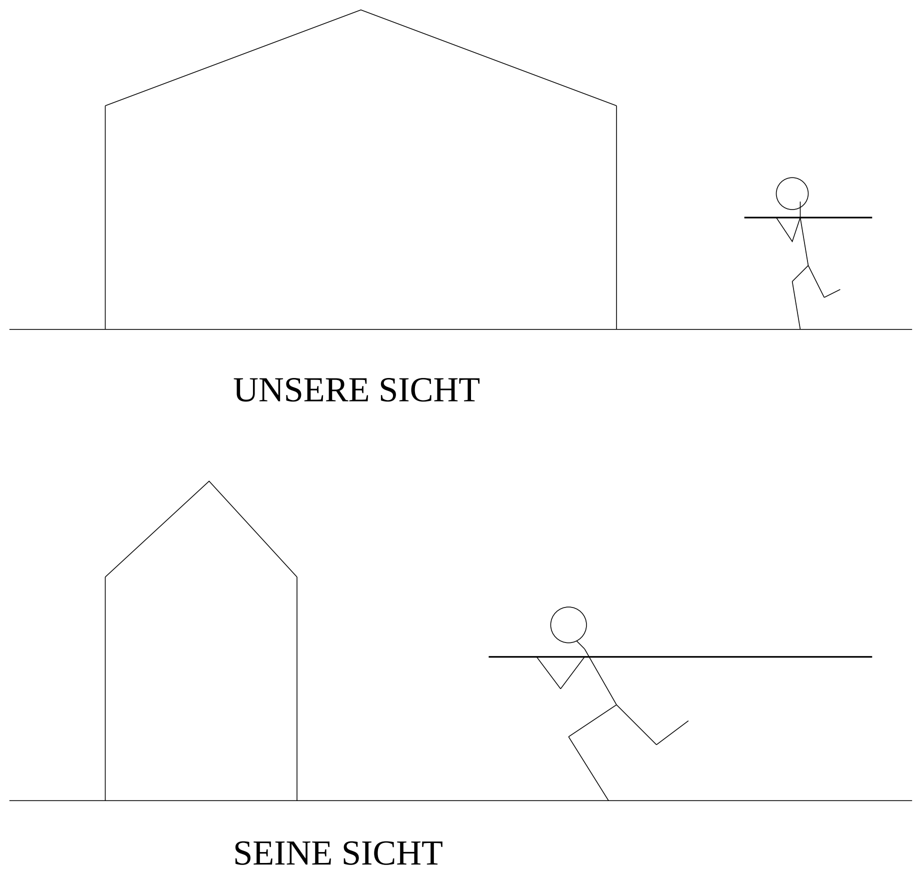


Bild 13. Experiment zum Paradox des Stabhochspringers: Ein Sportler erhält einen 5 m langen Stab. Wir bitten ihn, damit auf eine Scheune zuzulaufen, die 7.5 m tief ist, und deren Eingang geöffnet ist, während der Ausgang zunächst verschlossen bleibt. Wir haben die Absicht, nach Einlaufen des Sportlers in die Scheune zunächst den Eingang hinter ihm zu schließen und ihm dann den Ausgang zu öffnen. Bei kleinen Geschwindigkeiten des Sportlers gelingt das Experiment ohne weiteres. Was aber, wenn der Sportler mit 99.5 % der Lichtgeschwindigkeit läuft? Aus unserer Sicht geht alles gut: Läufer und Stab sind in Bewegungsrichtung auf 50 cm Länge verkürzt und passen gut in die Scheune. Der Läufer bekommt aber einen großen Schreck: In seiner Hand hält er einen 5 m langen Stab, während er eine Scheune auf sich zurasen sieht, die lediglich eine Tiefe von 75 cm hat. Er sieht sein Ende gekommen.

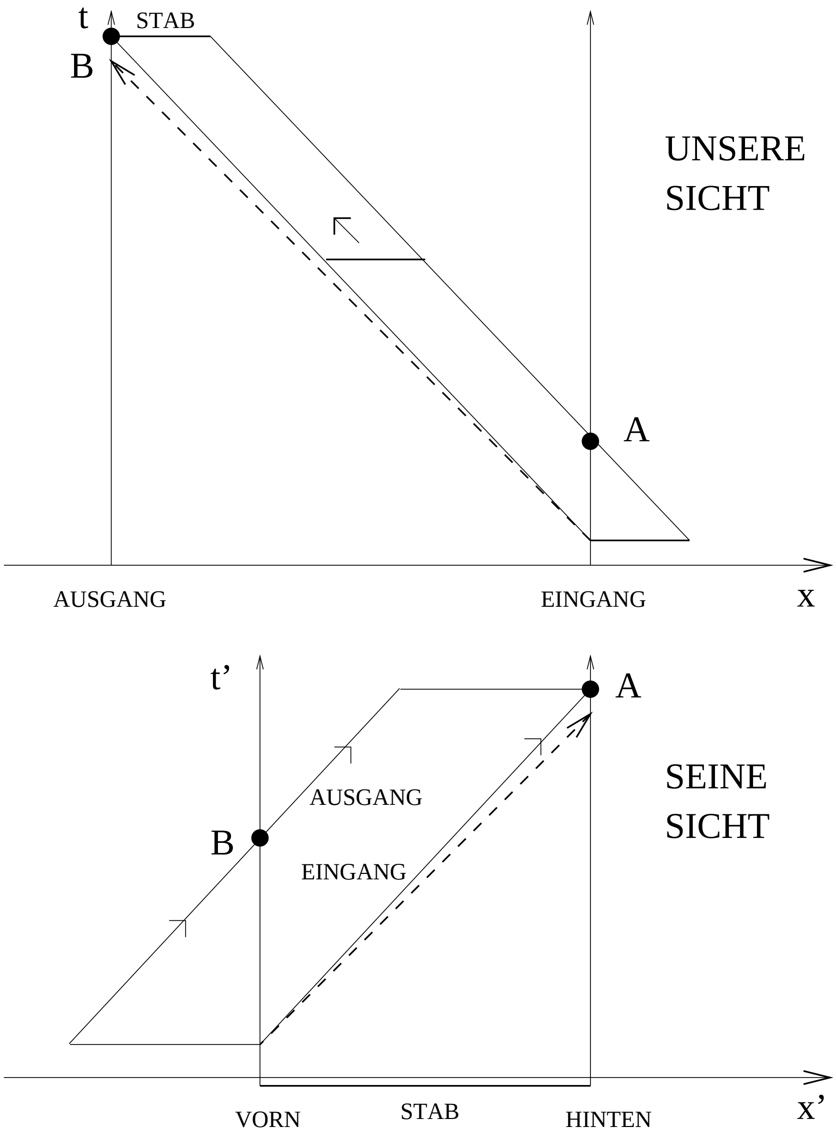


Bild 14. Raum-Zeit-Diagramme für die zeitliche Reihenfolge zweier Ereignisse. A: der Eingang wird hinter dem Stab geschlossen. B: der Ausgang wird vor der Spitze des Stabes geöffnet. Oberes Bild: A ist zeitlich vor B, so daß der Stab für eine gewisse Zeit in der Scheune eingeschlossen ist. Unteres Bild: Aus der Sicht des Sportlers ruht der Stab und die Tore bewegen sich. Die Weltlinien von Eingang und Ausgang sind eingezeichnet. Offenbar findet in diesen Koordinaten die Öffnung der Hintertür (B) vor dem Schließen des Eingangs (A) statt. Alles geht gut.

NR zu Abbildung 5: Bestimmung von $\Delta\tau(\Delta t_L, \Delta t_R)$

$\Delta\tau = T(\Delta t_L, \Delta t_R)$

Forderungen:

Spezialfall $v = 0$ (Abb. 4): $T(\Delta t, \Delta t) = \Delta t$

Homogenität: $T(s\Delta t_L, s\Delta t_R) = sT(\Delta t_L, \Delta t_R)$

R-L-Symmetrie in Abb. 5: $T(\Delta t_L, \Delta t_R) = T(\Delta t_R, \Delta t_L)$

Es gibt nur zwei *einfache* Funktionen, mit den geforderten Eigenschaften:

$$\begin{aligned} T(\Delta t_L, \Delta t_R) &= \tfrac{1}{2}(\Delta t_L + \Delta t_R) && \text{NEWTON} \\ T(\Delta t_L, \Delta t_R) &= \sqrt{\Delta t_L \, \Delta t_R} && \text{EINSTEIN} \end{aligned}$$

Anwendung der NEWTON-Regel erlaubt die Einführung einer absoluten Zeit und ist im Widerspruch zum Experiment (siehe später).

NR zu Abbildung 8: Bestimmung von $\Delta\tau(v)$

Aus der Geometrie der Abbildung:

$$\Delta t_L = \Delta t + D/c$$
$$\Delta t_R = \Delta t - D/c$$

Einsetzen in die EINSTEIN-Formel für $\Delta\tau$:

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \sqrt{\Delta t_L\,\Delta t_R} \\ &= \sqrt{(\Delta t + D/c)\,(\Delta t - D/c)} \\ &= \sqrt{(\Delta t)^2 - D^2/c^2} \\ &= \Delta t\,\sqrt{1 - v^2/c^2}\end{aligned}$$

Dabei haben wir $D = v\Delta t$ benutzt.

3 Herleitung der Lorentz-Transformation

3.1 Inertialsysteme

Inertialsystem (IS) = Bezugssystem, in dem Probeteilchen sich geradlinig gleichförmig (auf Geraden in Raum-Zeit) bewegen.
Dies ist äquivalent mit der Feststellung, daß keine Kräfte wirken (z.B. Gravitation, Beschleunigung durch Rotation).
Inertialsystem sind Idealisierungen, die sich nur näherungsweise realisieren lassen (z.B. durch Einschränkung auf ein hinreichend kleines Raum-Zeit-Gebiet).
Inertialsysteme bewegen sich relativ zueinander mit konstanten Geschwindigkeiten.

3.2 Leistungen der SRT

- Umrechnung von "Messungen", die in einem IS gemacht werden, in ein beliebiges anderes IS
  $\rightarrow$ Lorentz-Transformationen (LT),
- Herleitung von Folgerungen aus der Forderung, daß sich die Naturgesetze "kovariant" unter LT transformieren müssen.

Die LT kann aus 3 Postulaten hergeleitet werden, siehe z.B.
V. Berzi und V. Gorini, J. Math. Phys. 10 (1969) 1518.

3.3 Postulate der SRT

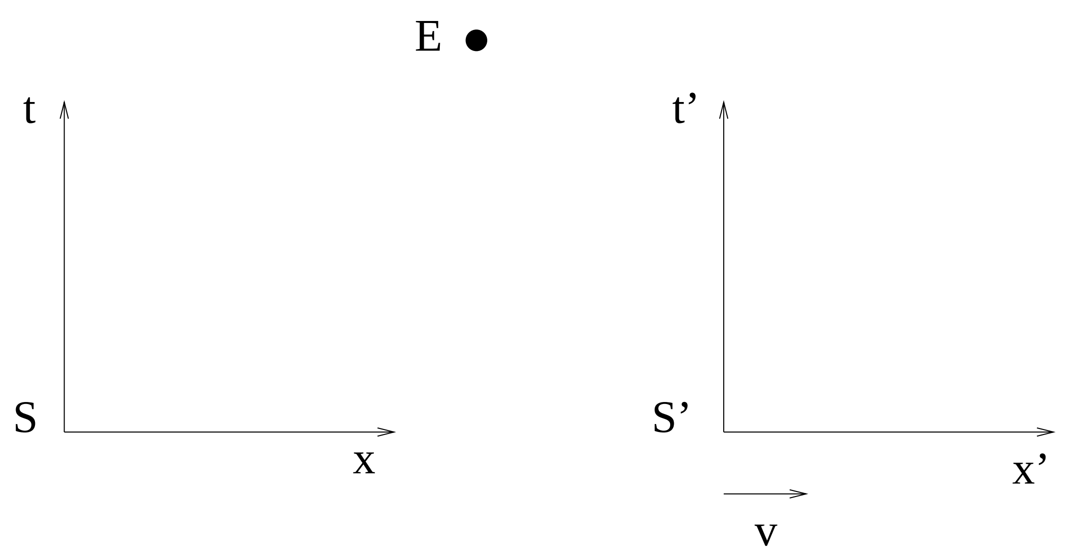
R: Es gilt das *Relativitätsprinzip*: Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Die Naturgesetze können daher so formuliert werden, daß sie beim Wechsel von einem Inertialsystem zu einem anderen ihre Form nicht ändern.

H: Raum-Zeit ist *homogen*, d.h. kein Punkt oder Gebiet in Raum-Zeit ist ausgezeichnet.

I: Der Raum ist *isotrop*, d.h. im Raum ist keine Richtung ausgezeichnet.

3.4 Setup und Fragestellung

Eine Raumdimension, eine Zeitdimension, Verallgemeinerung später.
Zwei Inertialsysteme S und S'. Die Geschwindigkeit des Ursprungs von S' im System S sei v.



Ein Ereignis E habe in S die Koordinaten $\xi = (x, t)$, in S' die Koordinaten $\xi' = (x', t')$.
Gesucht ist die Funktion f, mit der man diese Koordinaten ineinander umrechnet:

$$\xi' = f(\xi)$$

3.5 f ist linear!

H $\rightsquigarrow$ $\xi' = f(\xi)$ invariant unter Verschiebungen:

$$f(\xi + \alpha) = \xi' + \alpha' = f(\xi) + \alpha'$$

α' darf von f und α abhängen, nicht aber von ξ.
Spezialfall $\xi = 0$:

$$f(\alpha) = f(0) + \alpha' \quad \rightsquigarrow \quad \alpha' = f(\alpha) - f(0)$$

Einsetzen $\rightsquigarrow$

$$f(\xi+\alpha) = f(\xi) + f(\alpha) - f(0)$$

Definition: $g(\xi) \equiv f(\xi) - f(0)$

$$g(\xi+\alpha) = g(\xi) + g(\alpha)$$

Satz: g stetig im Ursprung $\rightsquigarrow g(\lambda\xi) = \lambda\, g(\xi)$.
g ist also linear und homogen.
Im folgenden o.B.d.A. $f(0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad f = g$, d.h. zur Zeit $t = 0$ fallen die Koordinatenursprünge von S und S' zusammen.

Allgemeinste Abbildung, die homogen und linear ist:

$$\begin{aligned} x' &= a(v)\,x + b(v)\,t \qquad\qquad (T1) \\ t' &= c(v)\,x + d(v)\,t \end{aligned}$$

3.6 Reziprozität

Geschwindigkeit v von S' in S kann durch a und b ausgedrückt werden:

$$x' = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x = -\frac{b(v)}{a(v)}\,t \quad \rightsquigarrow \quad v = -\frac{b(v)}{a(v)}$$

<u>Annahme:</u> Raum-Achsen von S und S' zeigen in die gleiche Richtung. Zeit fließt in beiden Systemen im gleichen Sinn.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial x} &= a(v) > 0 \qquad\qquad (UG) \\
\frac{\partial t'}{\partial t} &= d(v) > 0
\end{aligned}
$$

$w =$ Geschwindigkeit des Ursprungs von S im System S':

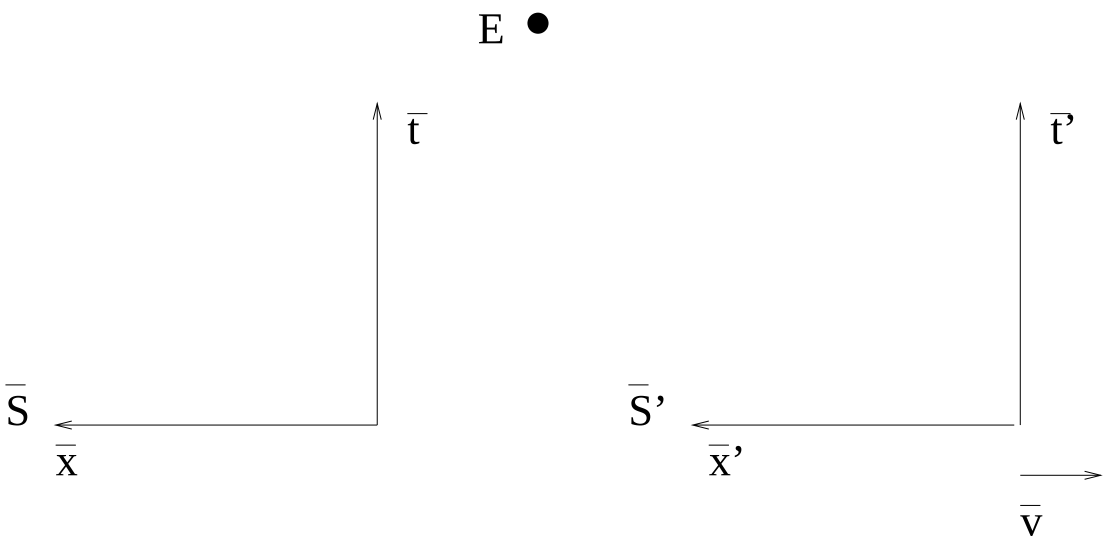
$$
x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x' = b(v)\,t = \frac{b(v)}{d(v)}\,t' \quad \rightsquigarrow \quad w = \frac{b(v)}{d(v)} \equiv \varphi(v)
$$

$$
\mathbf{R} \quad \rightsquigarrow \quad v = \varphi(w) = \varphi(\varphi(v))
$$

3.7 Bestimmung der Funktion φ

Spiegelung der Ortsachsen in S und in S':

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= -x \qquad\qquad (NK) \\
\bar{t} &= t \\
\bar{x}' &= -x' \\
\bar{t}' &= t'
\end{aligned}
$$



I $\rightsquigarrow$ Transformationsgleichungen für die neuen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= a(\bar{v})\,\bar{x} + b(\bar{v})\,\bar{t} \\ \bar{t}' &= c(\bar{v})\,\bar{x} + d(\bar{v})\,\bar{t} \end{aligned} \qquad (T2)$$

$\bar{v}$ = Geschwindigkeit von $\bar{S}'$ in $\bar{S}$:
Einsetzen von (NK) in $(T1)$ ergibt:

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= a(v)\,\bar{x} - b(v)\,\bar{t} \\ \bar{t}' &= -c(v)\,\bar{x} + d(v)\,\bar{t} \end{aligned} \qquad (T3)$$

Man liest ab: $\bar{v} = b(v)/a(v) = -v$.
Vergleich von $(T2)$ mit $(T3)$:

$$\begin{aligned} a(-v) &= a(v) \\ b(-v) &= -b(v) \\ c(-v) &= -c(v) \\ d(-v) &= d(v) \end{aligned} \qquad (VR)$$

a und d sind gerade, b und c sind ungerade. Also ist $\varphi = b/d$ ungerade.

<u>Satz:</u>

- $\varphi(-v) = -\varphi(v)$
- $\varphi(\varphi(v)) = v$
- Definitionsbereich von φ reelles Intervall
- φ stetig

dann *entweder*

- $\varphi(v) = v \quad$ *oder*
- $\varphi(v) = -v$

$\varphi(v) = v$ zieht $d = -a$ nach sich, und das ist im Widerspruch zu (UG), daher

$$\varphi(v) = -v$$

und

$$b(v)/d(v) = -v = b(v)/a(v) \quad \leadsto \quad \begin{array}{rcr} d & = & a \\ b & = & -v\,a \end{array}$$

Einsetzen in $(T1)$:

$$\begin{array}{rcl} x' & = & a(v)\,x - v\,a(v)\,t \\ t' & = & c(v)\,x + a(v)\,t \end{array}$$

3.8 Bestimmung von c

Inverse Transformation:

$$\begin{aligned} x &= \quad \Delta^{-1}(v)\, a(v)\, x' + \Delta^{-1}(v)\, v\, a(v)\, t' \qquad (T5) \\ t &= -\Delta^{-1}(v)\, c(v)\, x' + \Delta^{-1}(v) \quad a(v)\, t' \end{aligned}$$

mit

$$\Delta(v) = a(v)\,[a(v) + v\, c(v)]$$

$w = -v$, daher:

$$\begin{aligned} x &= a(-v)\, x' + v\, a(-v)\, t' \qquad (T6) \\ t &= c(-v)\, x' + \quad a(-v)\, t' \end{aligned}$$

Vergleich unter Benutzung von (VR):

$$a(v) = \frac{1}{a(v) + v\, c(v)}$$

so daß

$$c(v) = \frac{1}{v}\,(1/a(v) - a(v))$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} x' &= a(v)\, x - v\, a(v)\, t \qquad (T7) \\ t' &= \tfrac{1}{v}\,(1/a(v) + a(v))\;\, x + \; a(v)\, t \end{aligned}$$

3.9 Bestimmung von a

LT bilden eine Gruppe: Komposition von 2 LT vom Typ $(T7)$ mit v und v' soll wieder vom Typ $(T7)$ mit geeignet gewähltem v''.

Abkürzung: $a(v) = a$, $a(v') = a'$.

$$\begin{pmatrix} a & -va \\ \frac{1}{v}(a^{-1}-a) & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -v'a' \\ \frac{1}{v'}(a'^{-1}-a') & a' \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} aa' - \frac{v}{v'}a(a'^{-1}-a') & -(v+v')aa' \\ \frac{a'}{v}(a^{-1}-a) + \frac{a}{v'}(a'^{-1}-a') & aa' - \frac{v'}{v}a'(a^{-1}-a) \end{pmatrix}$$

Diagonalelemente in $(T7)$ sind gleich, daher

$$aa' - \frac{v}{v'}\,a\,(a'^{-1}-a') = \; aa' - \frac{v'}{v}(a^{-1}-a)$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{v^2}\,(1-a^{-2}) = \frac{1}{v'^2}\,(1-a'^{-2})$$

v, v' beliebig, daher notwendig

$$\frac{1}{v^2}\,(1-a^{-2}) = K \quad \rightsquigarrow \quad a = \frac{1}{1-K\,v^2}$$

K universelle Konstante, $[K] = [Geschwindigkeit]^{-2}$.

Außerdem:

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + K\, v\, v'} \qquad\qquad (AT)$$

Man kann <u>3 Fälle</u> unterscheiden:

<u>$K > 0$</u>

Definiere: $c = K^{-1/2}$= Lichtgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - v\,t) = \gamma(x - \beta\, ct) \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ \gamma &= 1/\sqrt{1-\beta^2} \\ \beta &= v/c \end{aligned}$$

Eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation. Definiert nur für $-c < v < c \quad \rightsquigarrow \quad c$ ist eine obere Grenzgeschwindigkeit.

<u>$K = 0$</u>

$$\begin{aligned} x' &= x - v\,t \\ t' &= t \end{aligned}$$

Galilei-Transformation.

<u>$K < 0$</u>

führt zu Widersprüchen, z.B. dem, daß zwei gleichgerichtete Geschwindigkeiten sich zu einer Geschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung "addieren können", vergleiche (AT).

3.10 Vereinfachte Herleitung mit Konstanz von c

Wenn man

K: Die Lichtgeschwindigkeit c ist in allen Inertialsystemen dieselbe.

postuliert (also nicht herleitet), kommt man schneller zum Ziel. Ansatz:

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad\qquad (LA)$$

Analog wie in der obigen Herleitung zeigt man $\gamma(v) = \gamma(-v)$ und erhält für die Umkehrtransformation mit **R**:

$$x = \gamma(x' + vt')$$

Beide Beobachter senden zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ (zu diesem Zeitpunkt mögen die beiden System zusammenfallen) einen Lichtblitz aus. Nach den Zeiten t bzw. t' ist die Position der Wellenfront gegeben durch $x = ct$ bzw. $x' = ct'$. Auflösen nach den Zeiten und oben einsetzen:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vx/c) &&= \gamma x(1 - v/c) \\ x &= \gamma(x' + vx'/c) &&= \gamma x'(1 + v/c) \end{aligned}$$

Multipliziere beide Gleichungen miteinander:

$$xx' = \gamma^2 xx'(1 - v^2/c^2) \quad \rightsquigarrow \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Die Transformationsgleichung für die Zeiten bekommt man durch durch Einsetzen von $x' = ct'$ und $t = x/c$ in (LA):

$$ct' = \gamma(ct - vx/c)$$

3.11 Verallgemeinerung auf drei Dimensionen

Nach wie vor: Koordinaten-Systeme fallen zum Zeit-Punkt $t = 0$ zusammen. v = Geschwindigkeit von S' in S entlang der x-Achse. Ansatz:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= \alpha\, y \\ z' &= \alpha\, z \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{aligned}$$

Der gleiche Faktor α in den mittleren Gleichungen beruht auf **I**: y und z sind völlig gleichberechtigt.

Die letzte Gleichung darf auf der rechten Seite keine y- oder z-Abhängigkeit enthalten, sonst würden aus der Sicht von S' Uhren, die z.B. bei $\pm y$ angeordnet sind, verschieden gehen, Widerspruch zu **I**.

Analog zu früher zeigt man α = gerade Funktion von v. Aus der Reziprozität folgt dann $\alpha^2 = 1$. Stetigkeit bei $v = 0$ verlangt

$\alpha = 1.$

3.12 LT bei beliebiger Richtung der Relativgeschwindigkeit

Zerlege die Ortsvektoren in beiden Systemen in Anteile parallel und senkrecht zur Relativgeschwindigkeit der Systeme:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_{||} &= \tfrac{(\vec{x}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2} \\
\vec{x}_{\perp} &= \vec{x} - \tfrac{(\vec{x}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2}
\end{aligned}$$

Analog für $\vec{x'}$. Die LT-Transformation lautet dann ($\vec{\beta} = \vec{v}/c$):

$$\begin{aligned}
\vec{x}'_{||} &= \gamma\left(\vec{x}_{||} - \vec{\beta}ct\right) \\
\vec{x}'_{\perp} &= \vec{x}_{\perp} \\
ct' &= \gamma\left(ct - \vec{\beta}\cdot\vec{x}_{||}\right)
\end{aligned}$$

4 Newton oder Einstein?

4.1 Die Kandidaten

Einstein, Lorentz-Transformation:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{aligned}$$

Newton, Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

4.2 Newtonsche Mechanik

Newtonsche Bewegungsgleichung für ein System von Massenpunkten mit Paarwechselwirkungen forminvariant unter Galilei-Transformationen (GT):

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\vec{\nabla}_i \sum_j \phi_{ij} \left(|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \right)$$

Transformation der Geschwindigkeiten:

$$\dot{\vec{r}}_i = \begin{pmatrix} \dot{x}_i{}' \\ \dot{y}_i{}' \\ \dot{z}_i{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_i - v \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{pmatrix}$$

Nochmaliges Ableiten ergibt

$$\ddot{\vec{r}}_i{}' = \ddot{\vec{r}}_i$$

Die Ortsableitungen sind invariant, $\vec{\nabla}_i = \vec{\nabla}'_i$, denn

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x'_i} + \frac{\partial y'_i}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y'_i} + \frac{\partial z'_i}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial z'_i}$$

und

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial x'_i}{\partial x_i} &= \tfrac{\partial}{\partial x_i}(x_i - vt) = 1 \\ \tfrac{\partial y'_i}{\partial x_i} &= \tfrac{\partial z'_i}{\partial x_i} = 0 \end{aligned}$$

usw.

Außerdem sind die Abstände invariant:

$$\left|\vec{r}'_i - \vec{r}'_j\right| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

Bewegungsgleichungen im gestrichenen System daher

$$m_i \ddot{\vec{r}}'_i = -\vec{\nabla}'_i \sum_j \phi_{ij} \left(\left|\vec{r}'_i - \vec{r}'_j\right|\right)$$

Newtonsche Mechanik genügt dem Galileischen Relativitätsprinzip.

4.3 Maxwellsche Elektrodynamik

Die Bewegungsgleichungen des elektromagnetischen Feldes (Maxwell-Gleichungen) sind *nicht* forminvariant unter Galilei-Transformationen.

Maxwell-Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{E} &= 4\pi\rho \\
\mathrm{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\
\mathrm{div}\vec{B} &= 0 \\
\mathrm{rot}\vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Potentiale:

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= -\mathrm{grad}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\
\vec{B} &= \mathrm{rot}A
\end{aligned}
$$

Eichinvarianz: Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unverändert, wenn

$$
\begin{aligned}
\phi &\to \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\omega}{\partial t} \\
\vec{A} &\to \vec{A}' + \mathrm{grad}\,\omega
\end{aligned}
$$

ω beliebige Funktion von t und $\vec{x}$.

Man kann die Eichfreiheit benutzen, um BG zu vereinfachen:
Z.B. Lorentzeichung: $\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{A} = 0$.

Entkoppelte Gleichungen für ϕ und $\vec{A}$:

$$\begin{aligned} \Box\phi &= 4\pi\rho \\ \Box\vec{A} &= \tfrac{4\pi}{c}\vec{j} \end{aligned}$$

d'Alembert-Operator

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

ED im Vakuum (keine Quellen ρ und/oder $\vec{j}$

$$\Box\psi = 0$$

ψ ist eine Komponente von $(\phi, \vec{A})$.

Lösungen: ebene Wellen, die sich mit Geschwindigkeit c ausbreiten:

$$\psi(t, \vec{x}) = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} \pm \omega(\vec{k})t)}$$

Dispersionsrelation: $\omega(\vec{k}) = c|\vec{k}|$

Sei nun

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} - \vec{v}t \\ t' &= t \end{aligned}$$

Falls

$$\left(\vec{\nabla}'^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\psi(t',\vec{x}') = 0$$

dann

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2}\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\right)\psi(t,\vec{x}) = 0$$

Das Galileische Relativitätsprinzip ist verletzt.

Drei Möglichkeiten:

M1 Maxwell-Gleichungen nicht korrekt, suche Gleichungen, die unter GT invariant sind.

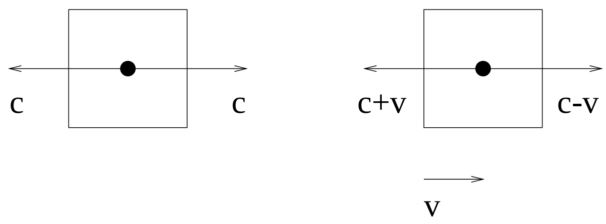
M2 Galileisches Relativitätsprinzip gilt nur in der Mechanik, während für die ED ein ausgezeichnetes Bezugssystem existiert, definiert durch einen "Äther", das Medium für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen.

M3 Sowohl für die Mechanik als auch für die ED gibt es ein (gemeinsames) Relativitätsprinzip, das nicht das Galileische sein kann. Mechanik muß daher abgeändert werden.

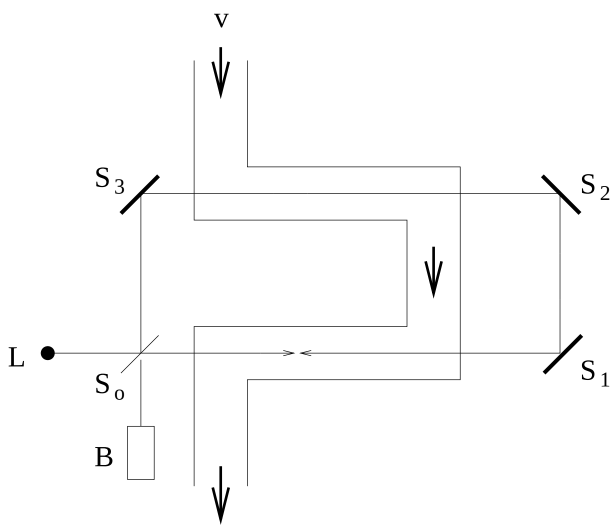
M1 wurde auch im 20. Jhdt. nicht ernsthaft erwogen, da Maxwell-Theorie extrem erfolgreich, keine Widersprüche zum Experiment.
M2 war die akzeptierte Lösung in der 2. Hälfte des 20. Jhdts. Nach Michelson-Morley jedoch nur unter Krämpfen zu halten.
M3 ist der Ausgangspunkt für die SRT, heute allgemein akzeptierte Lösung.

4.4 Gibt es einen Äther? Fizeau und Michelson-Morley

Annahme: Lichtausbreitung ist relativ zu einem ausgezeichneten Bezugssystem bzw. Medium mit gewissen Eigenschaften → Äther, analog Schallausbreitung in Luft.
Galilei-Transformation!



Versuch von Fizeau (1851), wiederholt von Michelson und Morley (1886) und mit hoher Präzision von Zeeman (1914-1922):



Aus dem Interferenzmuster bei B kann zurückgerechnet werden auf den Geschwindigkeitsunterschied des Lichtes gegen und mit der "Strömung".

Lichtgeschwindigkeit (bei ruhendem Äther) in den Rohren bei $v = 0$ ist c/n, wobei n Brechungsindex.
Galileisches Relativitätsprinzip: bei $v \neq 0$

$$c' = \frac{c}{n} \pm v$$

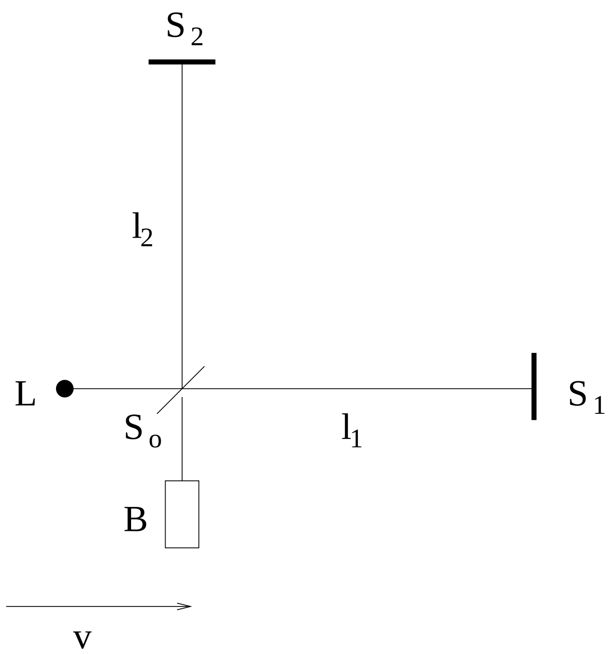
Gemessen (mit sehr hoher Präzision):

$$c' = \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Erklärung *möglich* im Paradigma des ruhenden Äthers:
Lichtwelle = einfallende ebene Welle (im ruhenden Äther) ohne WW mit der Flüssigkeit + Superposition von reimmitierten Kugelwellen von den Flüssigkeitsdipolen. Die Kugelwellen werden *allein* von der Flüssigkeit transportiert. Merkwürdig: Äther wird vom Wasser nicht mitgeführt, gibt aber Teil des Lichttransports ans Wasser ab.

4.5 Michelson-Versuch

ruhender Lichtäther $\rightsquigarrow$ Lichtgeschwindigkeit abhängig von der Relativbewegung zum Äther



Laufzeitdifferenz

$$t_2 - t_1 = \frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{l_1}{1-\beta^2}\right)$$

Nach Verdrehen um 90^o:

$$\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{1-\beta^2} - \frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Differenz der Differenz dieser beiden Größen für $\beta \ll 1$:

$$\Delta = (\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1) - (t_2 - t_1) \approx \frac{l_1 + l_2}{c}\beta^2$$

Verschiebung des Musters um eine volle Interferenzstreifenbreite wenn

$$\omega\Delta = 2\pi \quad \rightsquigarrow \quad l_1 + l_2 = \lambda/\beta^2$$

Annahme: Äther ruht bezüglich Sonnensystem, dann

$$\begin{aligned} \beta^2 &\approx 10^{-8} \\ \lambda &= 5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}, \quad \text{gelbes Licht} \\ l_1 + l_2 &\approx 50\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Anordnung mit Mehrfach-Spiegelung erforderlich.
Resultat: Es gibt keinen Ätherwind. Joos (1930): Ein Ätherwind von 1.5 km/s wäre noch nachweisbar.

4.6 Versuche zur Rettung der Ätherhypothese:

- Mitnahmehypothese: Äther wird von der Erde mitgenommen. Daher kein Widerspruch zu Michelson. Aber: Warum wird Äther nicht auch von Wasser bei Fizeau mitgenommen? Widerspruch zur beobachteten Aberration bei der Sternbeobachtung.

- Ritz: Lichtgeschwindigkeit hängt vom Bewegungszustand der Quelle ab (Vektoraddition). Aber: Widerspruch zur Lokalität der Maxwell-Gleichungen (Feldformulierung). Widerspruch zur Beobachtung von Doppelsternen. Michelson Morley funktioniert auch mit Sonnen- bzw. Sternlicht.

- Lorentz-Fitzgerald-Konstruktion: Bewegte Körper verkürzen sich in der Bewegungsrichtung um den Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$. Wirkt zumindest künstlich.

4.7 Weitere Hinweise auf die Konstanz von c

- Synchronisation von Atomuhren, verteilt auf der ganzen Erde, mit Funk würde bei Anwesenheit von Ätherwind nicht konsistent funktionieren.
- GPS (sogar ART-Korrekturen!)
- Funknavigation Loran-C

5 Lorentz-, Poincarégruppe, Minkowski-Geometrie

5.1 Gruppenstruktur

Die Menge der Transformationen $\mathcal{P}$ zwischen IS hat die Struktur einer Gruppe, abstrakt definiert durch:

- Assoziativität: $(g_1\, g_2)\, g_3 = g_1\, (g_2\, g_3)$
- Einheitselement: Es existiert ein Einheitselement, so daß $eg = ge = g$ für alle $g \in G$
- Inverses: Zu jedem $g \in G$ gibt es ein Element $g^{-1} \in G$ mit $g^{-1}\, g = g\, g^{-1} = e$

Hier: Multiplikation = Komposition (Hintereinanderschaltung), Einheitselement = identische Transformation, Inverses = Umkehrtransformation.

5.2 Lorentz- und Poincaré-Gruppe

Neue Notation:

$$(ct, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Konvention: schreibe Striche, Balken oder sonstige Merkmale, um verschiedene IS zu unterscheiden, an den Index.
Beispiele: $x^{\bar{1}}$, $x^{\bar{i}}$, $x^{\tilde{i}}$, $x^{i'}$

Poincaré-Transformationen

$$x^{\bar{i}} = f^i\left(x^k\right)$$

sind diejenigen Transformationen, die das Linienelement

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 = \eta_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

invariant lassen.

Metrischer Tensor

$$\eta = (\eta_{ik}) = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1) = (\eta_{ki})$$

Einsteinsche Summenkonvention: Summiere über alle Indizes, die zweimal auftauchen (einmal unten und einmal oben).

Vereinbarung: lateinische Indizes laufen von 0 bis 3 laufen, griechische von 1 bis 3.
Beispiele:

$$\begin{aligned} x_i x^i &= \sum_{i=0}^{3} x_i x^i \\ x_\alpha x^\alpha &= \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha x^\alpha \end{aligned}$$

Warnung: in den meisten Büchern bzw. Artikeln ist die Rolle von griechischen und lateinischen Indizes vertauscht!

Nachrechnen der Invarianz von ds^2 am Beispiel der bereits hergeleiteten LT:

$$\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - \beta ct) \\
y' &= y \\
z' &= z \\
ct' &= \gamma(ct - \beta x)
\end{aligned}$$

Bilde die Differentiale:

$$\begin{aligned}
dx' &= \gamma(dx - \beta cdt) \\
dy' &= dy \\
dz' &= dz \\
cdt' &= \gamma(cdt - \beta dx)
\end{aligned}$$

$$c^2(dt')^2 - (dx')^2 = \gamma^2 \left(1 - \beta^2\right) \left(c^2 dt^2 - dx^2\right) = c^2(dt)^2 - (dx)^2$$

Herleitung von Folgerungen aus der Invarianzbedingung:

$$\eta_{ik}\, dx^i\, dx^k = \eta_{mn}\, dx^{\bar{m}}\, dx^{\bar{n}}$$

Es gilt:

$$dx^{\bar{m}} = \frac{\partial x^{\bar{m}}}{\partial x^i}\, dx^i$$

Wichtig: Der hochgestellte i-Index unter dem Bruchstrich wird als Unten-Index gezählt.

$$\eta_{mn} \frac{\partial f^{\bar{m}}}{\partial x^i} \frac{\partial f^{\bar{n}}}{\partial x^j}\, dx^i\, dx^j = \eta_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

Wegen der Willkür der dx^i:

$$\eta_{mn} \frac{\partial f^{\bar{m}}}{\partial x^i} \frac{\partial f^{\bar{n}}}{\partial x^j} = \eta_{ij} \qquad\qquad (LB)$$

Zeigen jetzt, daß f <u>umkehrbar</u> und <u>linear</u>.
Invarianzbedingung auffassen als Matrix-Gleichung:

$$(Df)^T\, \eta\, (Df) = \eta$$

Df ist das Differential von f = Matrix der partiellen Ableitungen:

$$(Df)^m{}_i = \frac{\partial f^{\bar{m}}}{\partial x^i}$$

Multiplikationsregel für Determinanten:
$\det(A)\,\det(B) = \det(AB)$ und $\det(A^T) = \det(A)$, daher
$\det(Df) = \pm 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ eindeutige Umkehrbarkeit.

Differenziere (LB) nach x^j, permutiere die Indizes i, j, k zyklisch, addiere zwei der entstehenden Gleichungen, subtrahiere die dritte.

$$\eta_{mn} \frac{\partial f^{\bar{n}}}{\partial x^k} \frac{\partial^2 f^{\bar{m}}}{\partial x^j \partial x^i} = 0$$

Wegen $\det(Df) \neq 0$ verschwinden die zweiten Ableitungen von f, f ist also linear:

$$x^{\bar{i}} = L^i{}_k \, x^k + a^i$$

Koeffizienten $L^i{}_k$ der homogenen Transformation eingeschränkt durch

$$\eta_{mn} L^m{}_i L^n{}_k = \eta_{ik}$$

Bemerkung: Aus dieser Bedingung kann man die explizite Gestalt von L herleiten, siehe z.B. Jackson, Klassische Elektrodynamik, Kapitel 11.7.

Die umkehrbaren Transformationen, die ds^2 invariant lassen, bilden eine Gruppe, die *Poincaré*-Gruppe (= *inhomogene Lorentz-Gruppe*).

Darstellung in Matrix-Vektor-Notation:

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= Lx + a \\
L^T \eta L &= \eta
\end{aligned}
$$

Vergleiche $O^T O = id$ für Drehungen!

Zusammensetzungsregel für Poincaré-Transformationen:

$$(\bar{a}, \bar{L})(a, L) = (\bar{a} + \bar{L}a, \bar{L}L)$$

Die homogenen LT ($a = 0$) bilden eine Untergruppe $\mathcal{L}$ von $\mathcal{P}$, die *Lorentz-Gruppe*. Diese besteht aus:

- Boosts Λ, parametrisiert durch die drei Komponenten von $\vec{v}$
- räumlichen Rotationen R, parametrisiert z.B. durch drei Eulerwinkel
- Spiegelung der Zeitachse θ, $t \to -t$
- Spiegelung der räumlichen Komponenten Π, $\vec{x} \to -\vec{x}$

Matrix-Darstellung für Boosts ($\hat{\beta} = \vec{\beta}/\beta$):

$$
(\Lambda^i{}_k) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x\gamma & -\beta_y\gamma & -\beta_z\gamma \\ -\beta_x\gamma & 1+(\gamma-1)\hat{\beta}_x^2 & (\gamma-1)\hat{\beta}_x\hat{\beta}_y & (\gamma-1)\hat{\beta}_x\hat{\beta}_z \\ -\beta_y\gamma & (\gamma-1)\hat{\beta}_x\hat{\beta}_y & 1+(\gamma-1)\hat{\beta}_y^2 & (\gamma-1)\hat{\beta}_y\hat{\beta}_z \\ -\beta_z\gamma & (\gamma-1)\hat{\beta}_x\hat{\beta}_z & (\gamma-1)\hat{\beta}_y\hat{\beta}_z & 1+(\gamma-1)\hat{\beta}_z^2 \end{pmatrix}
$$

Räumliche Drehungen, z.B. Drehung um die z-Achse, mit Winkel θ:

$$
(R^i{}_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Räumliche Spiegelung:

$$
(\Pi^i{}_k) = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)
$$

Zeitspiegelung:

$$
(\theta^i{}_k) = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)
$$

Die beiden diskreten Transformationen sind nicht stetig mit dem Einselement verbunden. $\mathcal{L}$ zerfällt in vier Teile.
$\det(L) = \pm 1$ erlaubt Zerlegung in $\mathcal{L}_+$ und $\mathcal{L}_-$.

Z.B. $\Pi \in \mathcal{L}_-$, $\theta \in \mathcal{L}_-$, $\Pi\theta \in \mathcal{L}_+$

Weitere Unterscheidung durch ${L^0}_0$:

$$\eta_{mn} {L^m}_0 {L^n}_0 = \eta_{00} = 1$$

bzw.

$$\left({L^0}_0\right)^2 - \sum_{k=0}^{3} \left({L^k}_0\right)^2 = 1$$

woraus folgt

$$\left({L^0}_0\right)^2 \geq 1$$

$\rightsquigarrow \quad \mathcal{L}^\uparrow$ und $\mathcal{L}^\downarrow$

Vier Zusammenhangskomponenten:

$$\begin{array}{lllll}
\mathcal{L}_+^\uparrow & : \det(L) = +1, & \mathrm{sign} {L^0}_0 = +1 & \text{enthält } id \\
\mathcal{L}_-^\uparrow & : \det(L) = -1, & \mathrm{sign} {L^0}_0 = +1 & \text{enthält } \Pi \\
\mathcal{L}_+^\downarrow & : \det(L) = +1, & \mathrm{sign} {L^0}_0 = -1 & \text{enthält } \Pi\theta \\
\mathcal{L}_-^\downarrow & : \det(L) = -1, & \mathrm{sign} {L^0}_0 = -1 & \text{enthält } \theta
\end{array}$$

Nur $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ist für sich allein eine Gruppe, die anderen Komponenten enthalten kein id.

Aber:

- $\mathcal{L}^{\uparrow} = \mathcal{L}_{+}^{\uparrow} \cup \mathcal{L}_{-}^{\uparrow}$ orthochrone Lorentz-Gruppe
- $\mathcal{L}_{+} = \mathcal{L}_{+}^{\uparrow} \cup \mathcal{L}_{+}^{\downarrow}$ eigentliche Lorentz-Gruppe
- $\mathcal{L}_{0} = \mathcal{L}_{+}^{\uparrow} \cup \mathcal{L}_{-}^{\downarrow}$ orthochore Lorentz-Gruppe

Im allgemeinen genügt es, die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe $\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$ zu betrachten.

Gruppenstruktur der Poincaré-Gruppe von fundamentaler Relevanz z.B. in der Quantenfeldtheorie: Relativistische Zustände sind Elemente des Darstellungsraumes der unitären Darstellungen von $\mathcal{P}$.

$\rightsquigarrow$ Tensordarstellungen, Spinordarstellungen

Literatur:

S. Weinberg, Feynman Rules for Any Spin, Phys. Rev. B 133 (1964) 1318

S. Weinberg, Feynman Rules for Any Spin, II: Massless Particles, Phys. Rev. B 134 (1964) 882

5.3 Minkowski-Raum. Vierervektoren

Quadrupel x^i bilden 4-dimensionalen Vektorraum $\mathbf{X^4}$.
Transformation $x^{\bar{i}} = x^{\bar{i}}(x^k)$ affin linear, daher $\mathbf{X^4}$ affiner Raum.
Verbindungsvektoren Δx zwischen Ereignispaaren transformieren homogen:

$$\Delta x^{\bar{i}} = L^{\bar{i}}{}_k \Delta x^k$$

Sie bilden einen vierdimensionalen Vektorraum $\mathbf{V^4}$.

Invariantes "Längenquadrat":

$$(\Delta x)^2 = \eta_{ik}\, \Delta x^i\, \Delta x^k$$

$(\Delta x)^2$ hängt nicht vom IS ab, in dem es ausgewertet wird.

Minkoswki-Raum = Raum-Zeit mit dieser pseudometrischen Struktur

Definition: Ein physikalisches Objekt u, das bezüglich jedes Inertialsystems I ebenso wie Δx durch 4 Komponenten u^i festgelegt ist, und das beim Übergang zu einem anderen System $\bar{I}$ gemäß

$$u^{\bar{i}} = L^{\bar{i}}{}_k u^k$$

umzurechnen ist, nennt man *Vierervektor.*

Vektorraum-Struktur leicht nachzurechnen.

Viererquadrat:

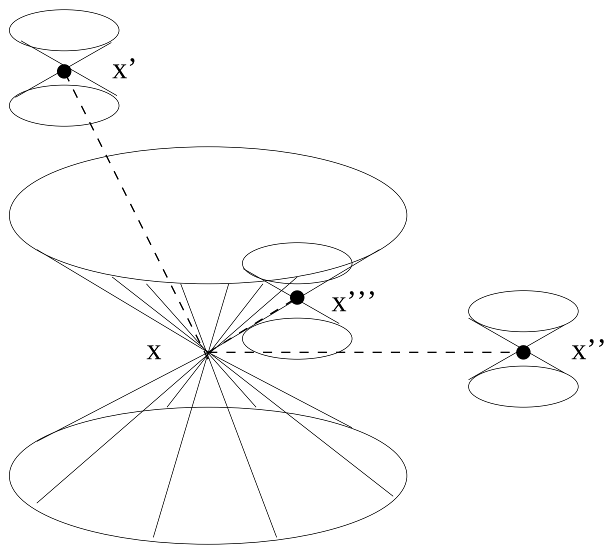
$$u^2 = \eta_{ik}\, u^i u^k = (u_0)^2 - \vec{u}^2$$

Skalarprodukt:

$$uw = \frac{1}{2}\left((u+w)^2 - u^2 - w^2\right) = \eta_{ik} u^i w^k = u^0 w^0 - \vec{u}\,\vec{w} = wu$$

Viererquadrat und Skalarprodukt sind Prototypen lorentzinvarianter Ausdrücke: *Viererskalare = Lorentzskalare*
u^2 nicht definit und kann 0 sein, ohne daß $u = 0$

$$\begin{array}{lll} u^2 > 0 & \text{zeitartige} & \\ u^2 = 0 & \text{lichtartige} & \text{Vierervektoren} \\ u^2 < 0 & \text{raumartige} & \end{array}$$



- Zeitartige Trennung (x, x'): Das Ereignis x' liegt innerhalb des Lichtkegels von x, also in Zukunft oder Vergangenheit.

- Raumartige Trennung (x, x''): Das Ereignis x'' gehört zur Gegenwart von x.
- Lichtartige Trennung (x, x'''): Das Ereignis x''' liegt auf dem Lichtkegel von x.

Einschränkung auf LT ohne Umkehrung des Zeitsinns:
$u^2 > 0 \quad \rightsquigarrow \quad u^0 > 0$, und gilt $u^0 > 0$ in I, so auch in einem beliebigen anderen IS $\bar{I}$.

Beweis:
Sei $u^2 > 0$ und $u^0 > 0$, dann

$$(u^0)^2 - \vec{u}^2 > 0 \quad \rightsquigarrow \quad u^0 > |\vec{u}| \geq 0$$

Benutze jetzt $|\vec{\beta}| < 1$ für Relativ-Geschwindigkeiten zwischen IS. Cauchy-Ungleichung

$$|\vec{u} \cdot \vec{\beta}| \leq \vec{u}| \, |\vec{\beta}| \leq |\vec{u}| < u^0 \quad \rightsquigarrow \quad u^{\bar{0}} = \gamma(u^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{u}) > 0$$

Analog für den Fall $u^2 = 0$.

Ein Vierervektor mit $u^0 > 0$ heißt *zukunftsgerichtet*, einer mit $u^0 < 0$ *vergangenheitsgerichtet*.
Zukunftsgerichtete lichtartige bzw. zeitartige Vektoren $\rightarrow$ *Vorwärtslichtkegel*, entsprechend ist ist der *Rückwärtslichtkegel* definiert.

5.4 Normalformen

Zeitartiger Vektor u: Es gibt stets ein Inertialsystem $\bar{I}$ (das *Ruhesystem* von u, in dem die Komponenten die Normalform

$$\left(u^{\bar{i}}\right) = \left(\pm\sqrt{u^2}, \vec{0}\right)$$

annehmen (± je nach Zeitorientierung).

Raumartige Vektoren lassen sich durch Wahl eines geeigneten Bezugssystems stets auf die Form

$$\left(u^{\bar{i}}\right) = \left(0, \sqrt{-u^2}, 0, 0\right)$$

bringen.

Lichtartiges u läßt sich zu

$$\left(u^{\bar{i}}\right) = (\pm 1, 1, 0, 0)$$

transformieren.

5.5 Kovariante und kontravariante Vektorkomponenten

u^i heißen *kontravariante* Vektorkomponenten.
Kovariante Komponenten definiert durch

$$u_i = \eta_{ik} u^k = (u^0, -u^1, -u^2, -u^3)$$

Damit z.B.

$$u\,w = \eta_{ik} u^i w^k = u_i w^i = u^i w_i$$

Umkehr-Relation: Inverse des metrischen Tensors mit Komponenten η^{ik} definiert durch

$$\eta^{ik}\,\eta_{kj} = \delta^i_j$$

Für $\eta = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$ gilt

$$\eta^{ik} = \eta_{ik}$$

Kontravariant aus kovariant:

$$u^i = \eta^{ik}\,u_k$$

Transformationsverhalten der kovarianten Komponenten:

$$u_{\bar{i}} = \eta_{ik}\,u^{\bar{k}} = \eta_{ik}\,L^k{}_j\,u^j = \eta_{ik}\,L^k{}_j\,\eta^{jm} u_m$$

Dies wird geschrieben als

$$u_{\bar{i}} = L_i{}^m\,u_m$$

mit

$$L_i{}^m = \eta_{ik}\,L^k{}_j\,\eta^{jm}$$

Wichtiges Beispiel für einen auf natürliche Weise kovarianten Vektor ist der *Vierergradient*.

Skalares Feld: $x \to \varphi(x)$
Verhalten unter LT:

$$\varphi(x) = \varphi(x^k) = \bar{\varphi}(x^{\bar{k}}) = \bar{\phi}(\bar{x})$$

Definition des Vierergradienten:

$$\begin{aligned} \partial_i \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \varphi_{,i} \\ \partial_{\bar{i}} \bar{\varphi} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^{\bar{i}}} = \bar{\varphi}_{,\bar{i}} \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel gilt:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^{\bar{i}}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{\bar{i}}}$$

Wegen $dx^{\bar{i}} = L^i{}_j dx^j$ gilt die Umkehrung

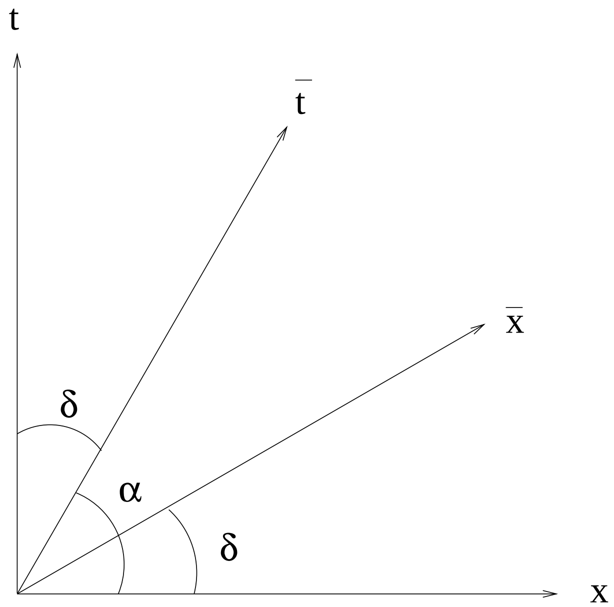
$$dx^k = L_i{}^k \, dx^{\bar{i}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial x^k}{\partial x^{\bar{i}}} = L_i{}^k$$

Daher transformiert sich der Gradient tatsächlich wie ein kovarianter Vektor.

6 Physikalische Konsequenzen der Lorentz-Transformation

Im folgenden meist $c \equiv 1$.

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \gamma(t - v\,x) \\ \bar{x} &= \gamma(x - v\,t) \end{aligned}$$



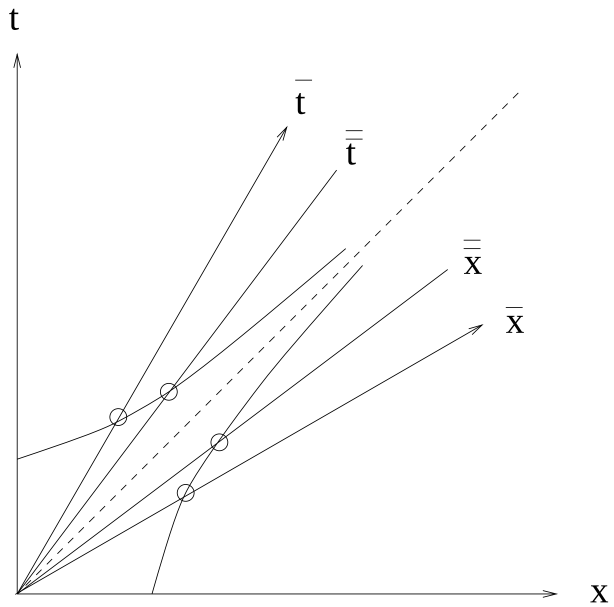
$\bar{x}$-Achse def. durch $\bar{t} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad t = vx \quad \rightsquigarrow \quad \tan\delta = v$

$\bar{t}$-Achse def. durch $\bar{x} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x = vt \quad \rightsquigarrow \quad \tan\alpha = 1/v$

Invariant: $t^2 - x^2 = \bar{t}^2 - \bar{x}^2$.

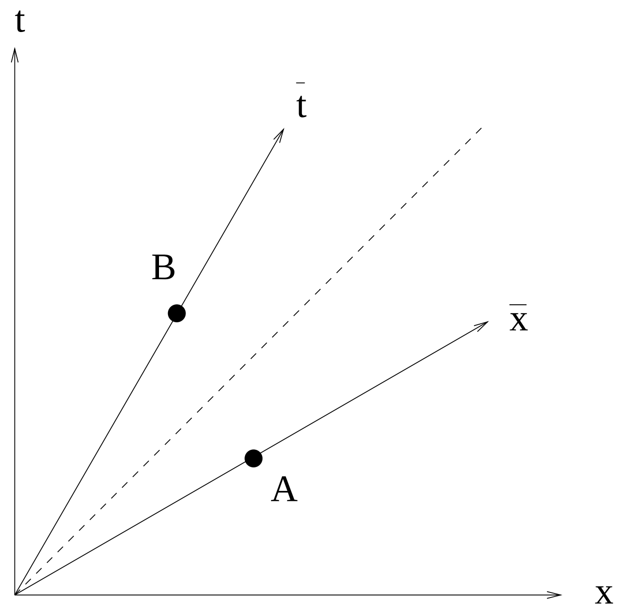
Einheitspunkt auf $\bar{t}$-Achse: $t^2 - x^2 = 1$

Einheitspunkt auf $\bar{x}$-Achse: $x^2 - t^2 = 1$



6.1 Relativität der Gleichzeitigkeit, Kausalität

Gleichzeitigkeit ist keine Invariante unter Wechsel des IS.



I: A tritt später ein als O

$\bar{I}$: A ist gleichzeitig mit O

Wegen $v < 1$ kann die x-Achse nicht über die gestrichelte Linie gedreht werden. B findet für alle Beobachter später als O statt.

$x^2 = t^2 =$ Lichtkegel. Beschreibt den Zeitverlauf einer mit Lichtgeschwindigkeit auf O kontrahierenden und dann reexpandierenden Kugelwellenfront. Lichtartige Vierervektoren.

Jedes Ereignis *außerhalb* des Lichtkegels kann durch geeignete Wahl des IS mit O simultan gemacht werden (*Gegenwart von O*). Raumartige Vierervektoren.

Ereignisse innerhalb des *Vorwärtslichtkegels* sind für alle Beobachter in der *Zukunft* von O. Zeitartige Vierervektoren.
Analog begrenzt der *Rückwärtslichtkegel* die *Vergangenheit* von O.

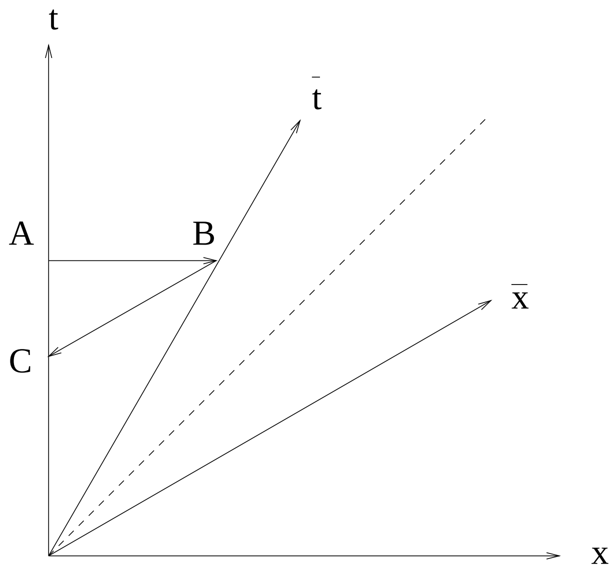
Kausalstruktur:
Ein Ereignis A außerhalb des Lichtkegels kann keinen kausalen Zusammenhang mit O haben, da es ein Koordinatensystem gibt, für den A und O gleichzeitig und räumlich getrennt erscheinen. O kann alle Ereignisse im Vorwärtslichtkegel beeinflussen, und kann von allen Ereignissen im Rückwärtslichtkegel beeinflußt

werden.

6.2 Überlichtgeschwindigkeit

LT für $v > c$ sinnlos. Kein Körper kann sich in irgendeinem IS mit $v > c$ bewegen (siehe auch relativistische Mechanik, später).

Lichtgeschwindigkeit auch obere Grenzgeschwindigkeit für jede Signalausbreitung.



Annahme einer unendlichen Signalgeschwindigkeit: Aussenden eines Signals bei A, Reflektion bei B, Empfang bei C, zeitlich vor A, Widerspruch!

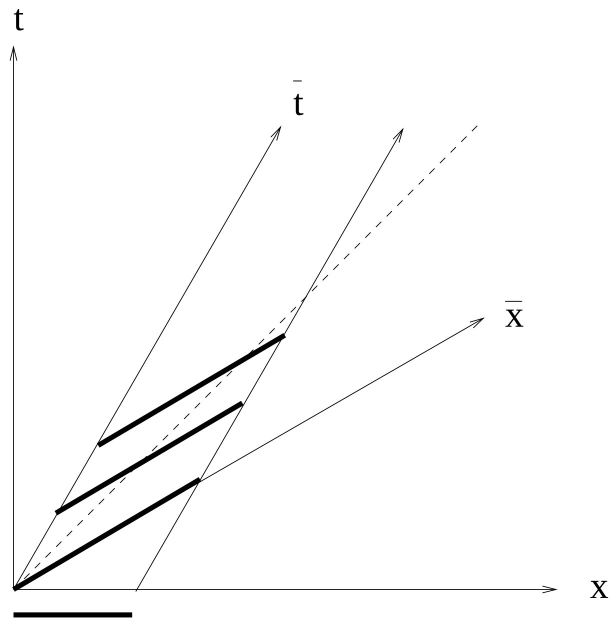
Geschwindigkeit eines Signals (Diskontinuität) in der Regel *Front-geschwindigkeit* einer Welle

$$v_F = \lim_{k\to\infty} \frac{\omega(k)}{k}$$

Wichtige Folgerung: Es gibt keine starren Körper, sonst wäre Signalübertragung instantan möglich.

6.3 Lorentzkontraktion

Bewegtes Objekt beschrieben durch die Weltlinien seiner "Atome". Größe gegeben durch Lage seiner Punkte zum Zeitpunkt t: Schnitt mit der Fläche $t = const.$



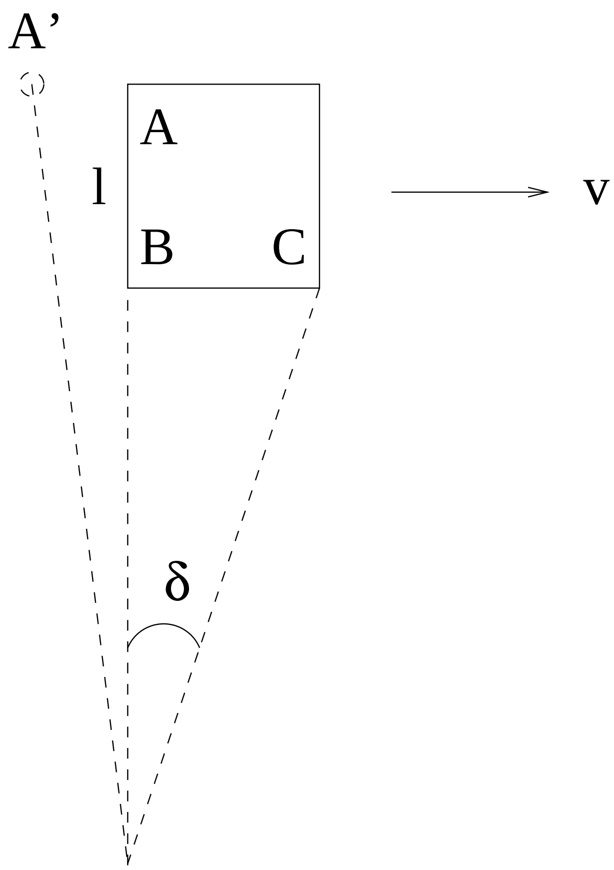
$\Delta\bar{x} = \bar{x} = \gamma\Delta x$, da $\Delta t \equiv 0$.

Daher

$$\Delta x = \sqrt{1-v^2}\,\Delta\bar{x}$$

Wie wirkt sich die Lorentzkontraktion bei visueller bzw. photographischer Beobachtung eines ausgedehnten Objektes aus? (Penrose 1959, Terell 1959)

Visuelle Beobachtung liefert retardierte Position.



Lichtstrahl von Kante A hat längeren Weg, trifft verspätet ein und erscheint daher bei A'.

Größe des Objekt sehr klein gegen Abstand $\rightsquigarrow$ Lichtwege können in guter Näherung als parallel angenommen werden.

Licht von A muß $\Delta t = l$ früher emittiert werden. Würfel bewegt sich in dieser Zeit $\Delta x = v\Delta t = v\,l$ nach rechts. Daher $\bar{AA'} = v\,l$.

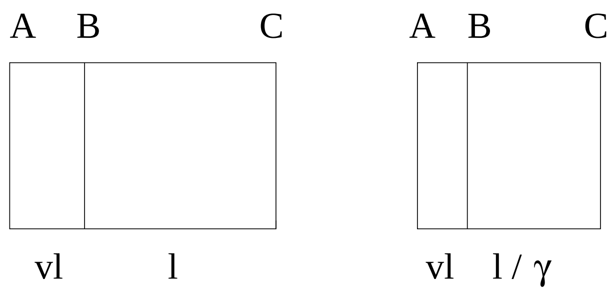


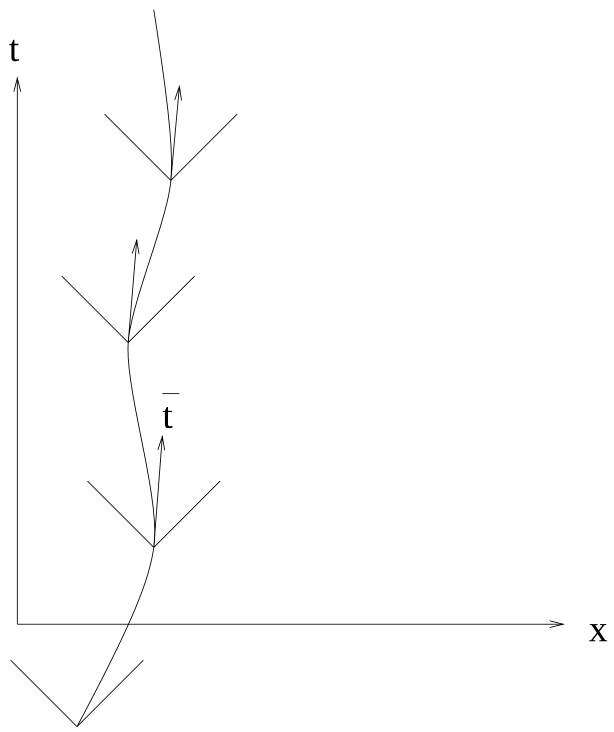
Bild mit Lorentzkontraktion ist Bild eines um $\alpha = \arcsin v$ *verdrehten* ruhenden Würfels.

6.4 Eigenzeit und Zeitdilatation

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = d\bar{t}^2 - d\bar{x}^2$$

ist lorentzinvariant.

Zur Interpretation



Instantanes Ruhesystem: $d\bar{x} = 0$, $ds = d\bar{t}$, $\bar{t}$-Achse parallel zur Tangente an die Weltlinie.

ds = Eigenzeitintervall = auf der mitgeführten Uhr angezeigtes Zeitintervall

Im System I: $x = x(t)$

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = dt^2(1 - v^2) < dt^2$$

Bewegte Uhren gehen langsamer (Zeitdilatation)!
Endliche Zeitintervalle (auch bei nichtkonstanter Geschwindig-

keit) durch Integration:

$$s(t_1) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{1 - v^2(t)}$$

6.5 Hafele-Keating-Experiment

Atomuhren können heute die relativistischen Zeiteffekte mit einer Genauigkeit von etwa 1 % bestätigen.

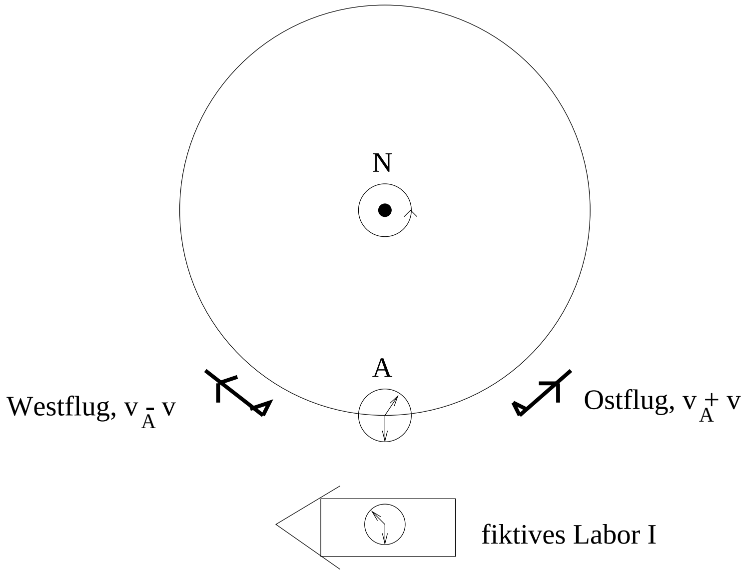
Erstes Experiment zur Zeitdilatation mit kommerziellen Atomuhren in Flugzeugen: Hafele und Keating 1971.

Zusätzlich zum SRT-Effekt: Uhren im Gravitationsfeld gehen langsamer!

Eine Uhr, die sich im Schwerefeld der Erde um die Höhe H weiter oben befindet als eine Vergleichsuhr, geht nach der Zeit t um die Zeitspanne

$$\Delta t_g = \frac{gH}{c^2}\, t$$

vor, wenn die Uhren anfänglich auf gleichen Stand gebracht wurden. (Herleitung später).



t_I = Zeit im (fiktiven) Labor I

v_A = 40 000 km/24h = 1667 km/h

Flugzeuggeschwindigkeit relativ zur Lufthülle: $v = 800$ km/h

Geschwindigkeiten des Flugzeugs relativ zu I:

Westflug: $v_{\text{West}} = v_A - v = 867$ km/h

Ostflug: $v_{\text{Ost}} = v_A + v = 2467$ km/h

Ohne Gravitationseffekt, aus der Sicht von I:

$t_{\text{Ost}} < t_A < t_{\text{West}}$

<u>Gravitationseffekt</u>:

Flugzeit ca. 50 h, $H = 10$ km $\rightsquigarrow$ Δt_g=196 ns.

Um diesen Betrag gehen beide die Flugzeuguhren *vor*.

Effekte durch die <u>Bewegung</u>:

$$\begin{aligned} t_A &= t_I \sqrt{1 - v_A^2/c^2} \\ t_{\mathrm{Ost}} &= t_I \sqrt{1 - v_{\mathrm{Ost}}^2/c^2} \\ t_{\mathrm{West}} &= t_I \sqrt{1 - v_{\mathrm{West}}^2/c^2} \end{aligned}$$

Zeitdifferenzen zur Uhr bei A, als Funktion von t_A:

$$\Delta t_{v,\mathrm{West/Ost}} = t_{\mathrm{Ost,West}} - t_A \approx t_A \left(\frac{v_A^2}{2c^2} - \frac{v_{\mathrm{West/Ost}}^2}{2c^2} \right)$$

Zahlenwerte für jeweils eine Erdumrundung einsetzen:

$$\begin{aligned} \Delta t_{v,\mathrm{Ost}} &= -255 \text{ ns, geht nach} \\ \Delta t_{v,\mathrm{West}} &= +156 \text{ ns, geht vor} \end{aligned}$$

Berücksichtigung des Gravitationseffekts:

$$\begin{aligned} \Delta t_{\mathrm{Ost}} &= -255 + 196 \text{ ns} = -\ \ 59 \text{ ns} \\ \Delta t_{\mathrm{West}} &= +156 + 196 \text{ ns} = +352 \text{ ns} \end{aligned}$$

Theoretischer Wert/Experimenteller Wert:
0.68 ± 0.39 (Ostflug) und 1.007 ± 0.077 (Westflug)

Relative Genauigkeit bei Ostflug kleiner, da Geschwindigkeits- und Gravitationseffekt sich zum Teil kompensieren.

6.6 Experimente mit Elementarteilchen

Zeitdilation verlängert im Labor gemessene Lebensdauer von bewegten Elementarteilchen!
Z.B. Myonen:

$$\mu \to e + 2\,\nu$$

Halbwertszeit für Zerfall im Ruhsystem des Myons: $\tau = 1.52\,\mu$s

1941 Rossi & Hall: Untersuchung des Zerfalls von Myonen in der Atmosphäre.

CERN 1959: μ-Teilchen im Speicherring mit 14 m Durchmesser, Bahngeschwindigkeit $v = 0.99942\,c$.

SRT-Vorhersage:

$$\tau(v) = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 29.4\,\tau = 44.6\,\mu\mathrm{s}$$

Übereinstimmung Experiment/Theorie perfekt innerhalb der experimentellen Fehler von 0.2 %.

7 Relativistische Mechanik

Kinematische und dynamische Grundgesetze müssen dem Relativitätsprinzip genügen: Alle IS gleichberechtigt $\rightsquigarrow$ Naturgesetze müssen *lorentzkovariant* (formuliert) sein.

7.1 Kinematik

Trajektorie (Bahn) eines Teilchens in bezug auf ein IS I:

$$\vec{x} = \vec{x}(t)$$

Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

hat kompliziertes Transformationsverhalten unter LT

$$x^{\bar{i}} = L^{i}{}_{k}\, x^k \,.$$

Vierergeschwindigkeit:

Parametrisiere Weltlinie durch (lorentzinvariante) Eigenzeit s:

$$x^i = x^i(s) \,.$$

Tangente an die Weltlinie:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}$$

u Vierervektor, da dx Prototyp eines Vierervektors, ds invariant.

Wegen

$$ds = dt\,\sqrt{1 - v(t)^2}$$

gilt

$$\frac{d}{ds} = \gamma\,\frac{d}{dt}\,.$$

Daher

$$u^i = \left(\frac{dt}{ds}, \frac{d\vec{x}}{ds}\right) = \gamma\ (1, \vec{v})\ .$$

Nichtrelativistischer Grenzfall (NR):

$$u^i \approx (1, \vec{v})$$

Viererquadrat von u:

$$u^2 = u^i\,u_i = \frac{dx^i dx_i}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1$$

Vierergeschwindigkeit *zeitartig*.

Definition des *Viererimpulses*:

$$p^i = m\,u^i\,, \quad p^i = \left(p^0, \vec{p}\right)$$

NR gilt

$$(p^i) \approx (m, m\vec{v})$$

Viererquadrat:

$$p^2 = \left(p^0\right)^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

Viererimpulse sind zeitartig und bilden ein Hyperboloid, die *Massenschale.*

Definition der *Viererbeschleunigung:*

$$b^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2}$$

Differentiation von $u^2 = 1$ nach s:

$$0 = \frac{d}{ds}\left(\eta_{ik}\,u^i\,u^k\right) = \eta_{ik}\,\left(u^i b^k + b^i u^k\right) = 2u^i\,b_i = 2u\,b$$

b orthogonal zu u und daher raumartig, vergl. Übungen.

Verallgemeinerung der Newton-Gleichung $\vec{F} = m\,\vec{a} = (d/dt)\,\vec{p}$ durch Definition der *Viererkraft*:

$$K^i = m\,b^i = m\,\frac{du^i}{ds} = \frac{dp^i}{ds}$$

Wenn die explizite Form von K gegeben ist (aus Theorie, z.B. Elektrodynamik), kann durch Integration der Bewegungsgleichung die Teilchenbewegung bestimmt werden.

K ein Vierervektor, dann Bewegungsgleichung automatisch lorentzkovariant.

Allgemein: Läßt sich ein Naturgesetz als Gleichung zwischen Vierervektoren schreiben, so genügt es automatisch dem Relativitätsprinzip.

<u>Zur Interpretation von p^0:</u>

Im momentanen Ruhesystem $\bar{I}$

$$\begin{aligned} u^{\bar{i}} &= (1, \vec{0}) \\ K^{\bar{i}} &= (0, \vec{k}) \end{aligned}$$

Letztere Gleichung wegen $ds = dx^{\bar{0}}$ im momentanen Ruhsystem und

$$K^{\bar{0}} = \frac{\partial^2 x^{\bar{0}}}{\partial s^2}$$

$\vec{k}$ übliche, im Ruhesystem wirkende Kraft.

LT auf das System I:

$$K^i = \left(\gamma \vec{v}\vec{k}, \vec{k} + \frac{\gamma - 1}{v^2}(\vec{v}\vec{k})\vec{v}\right) .$$

K^0 hat die Bedeutung der am Teilchen von Kraft $\vec{k}$ pro (Eigen-) Zeiteinheit geleistete Arbeit:

$$K^0 = \gamma\,\vec{k}\vec{v} = \gamma\,\vec{k}\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{k}\,\frac{d\vec{x}}{ds}$$

Wegen

$$K^0 = \frac{dp^0}{ds}$$

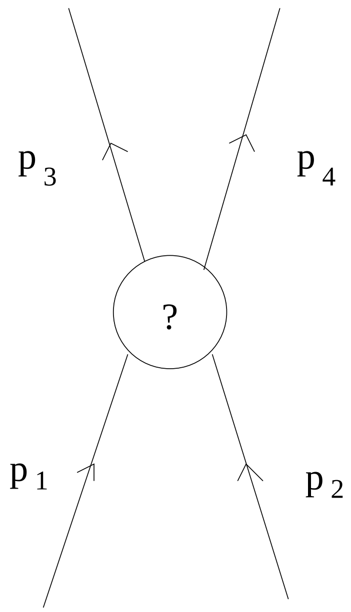
folgt $dp^0 = \vec{k}\,d\vec{x}$. K^0 erhält damit die Bedeutung der Energie des Teilchens.

$$p^0 = \gamma\,m = m + \frac{mv^2}{2} + \,...$$

m ist die *Ruhenergie* des Teilchens ($m\,c^2$ in konventionellen Einheiten), der Rest ist kinetische Energie T.

$$p^0 = m + T\;.$$

7.2 Streuung. Relativistische Massenzunahme



"Phasenraum" der ein- und auslaufenden Teilchen wird im nicht-relativistischen Grenzfall (NR) durch die Erhaltungssätze für die Impulse

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$$

und für die kinetische Energie

$$\frac{\vec{p_1}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p_2}^2}{2m_2} = \frac{\vec{p_3}^2}{2m_3} + \frac{\vec{p_4}^2}{2m_4}$$

eingeschränkt $\rightsquigarrow$ Elimination von 4 der 6 Freiheitsgrade.

Relativistische Verallgemeinerung: Erhaltung des (Gesamt-) Viererimpulses:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

Für $|\vec{v}| \ll 1$ gilt $p^i \approx (m, m\vec{v})$:

$$m_1 + m_2 = m_3 + m_4 \,,$$

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_3\vec{v_3} + m_4\vec{v_4} \,.$$

Nichtrelativistische Massenerhaltung kommt automatisch heraus.

Erhaltung der Null-Komponente des Viererimpulses:

$$m_1 + T_1 + m_2 + T_2 = m_3 + T_3 + m_4 + T_4 \,.$$

Nur die *Summe* von Ruhemasse und kinetischer Energie ist erhalten. Es kann daher Prozesse geben, bei denen eine Energieform in die andere umgewandelt wird.

Relativistischer Massenzuwachs:
Wegen $\vec{p} = \gamma\, m\, \vec{v}$ verhält sich ein Teilchen im Stoß so, als hätte es die Masse γm.
Ebenso nimmt die Gesamtenergie eines Teilchens $p^0 = \gamma m$ für $|\vec{v}| \to 1$ unbegrenzt zu $\leadsto$ Lichtgeschwindigkeit nicht erreichbar.
Aus $p^2 = m^2$ folgt

$$p^0 = +\sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}}$$

7.3 Lichtquanten: Dopplereffekt

Photonen sind *masselose* Teilchen:

$$p^2 = m^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad p^i = (|\vec{p}|, \vec{p})$$

Quantenmechanik:

$$p = \hbar\, k\,, \qquad k^i = (\omega, \vec{k})$$

k Wellenzahl-Vierervektor
ω Kreisfrequenz des Lichts
Richtung von $\vec{k}$ = Ausbreitungsrichtung
$|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$

Die Phase $wt - \vec{k}\vec{x} = kx$ ist lorentzinvariant.

Relativistischer Dopplereffekt
Ein Photon habe in $\bar{I}$ den Wellenzahl-Vektor

$$k^{\bar{i}} = \bar{\omega}(1, \cos\bar{\theta}, \sin\bar{\theta}, 0)$$

System I bewege sich gegen $\bar{I}$ mit Geschwindigkeit v in $\bar{x}$-Richtung. Dann

$$k^i = \omega(1, \cos\theta, \sin\theta, 0)$$

mit

$$k = \omega \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{\omega} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\bar{\theta} \\ \sin\bar{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1+v\cos\bar{\theta}}\,\bar{\omega}$$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \tfrac{\cos\bar{\theta}-v}{1-v\;\cos\theta} \\ \sin\theta &= \tfrac{\sqrt{1-v^2}\sin\bar{\theta}}{1-v\;\cos\theta} \end{aligned}$$

Spezialfall $\theta = \bar{\theta} = 0$:

$$\omega = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\,.$$

Transversaler Dopplereffekt, $\theta = \pi/2$:

$$\omega = \bar{\omega}\sqrt{1-v^2}$$

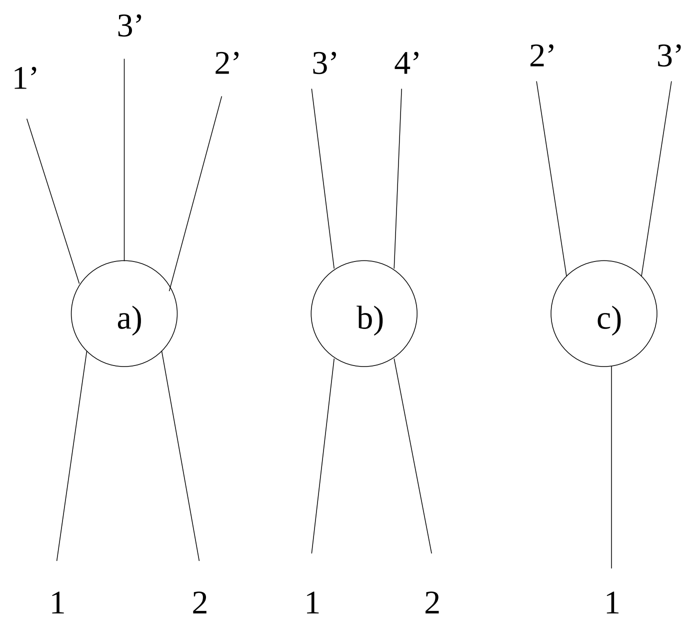
Beobachter bewegt sich senkrecht zum einfallenden Licht. Klassisch kein Effekt zu erwarten. Relativistischer Effekt eine Folge der *Zeitdilatation*. Messung dieses Effekts erstmals durch Ives und Stilwell 1938.

7.4 Umwandlung von Masse in Energie. Massendefekt

Bei Wechselwirkung von Teilchen bleibt nur die Summe aus Ruhenergie und kinetischer Energie erhalten:

$$m\,c^2 + T = \text{ const}$$

Wenn nicht durch andere Erhaltungssätze eingeschränkt, kann bei Stoßprozessen Masse in Energie umgewandelt werden und umgekehrt.



a) Erzeugungsprozeß, z.B. p+p $\rightarrow$ p + p + π^0 oder p+p $\rightarrow$ p + n + π^+. Kinetische Energie des einfallenden Protons liefert die nötige Ruhenergie des Pions.

b) Paarvernichtung, z.B. e^++e^- $\rightarrow$ 2γ, wurde 1932 in einer ersten Präzisionsmessung zur Überprüfung der Erhaltung des Vierer-Impulses benutzt. Ruhmasse wird vollständig in Energie (hier elektromagnetische Strahlung) umgewandelt.

c) Zerfall $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Erlaubt z.B. den Test des Additionstheorems für Geschwindigkeiten (Zerfall des Pions z.B. bei $v = 0.8$ c).

Im Alltag sind Masse und Energie (mit hoher Genauigkeit) separat erhalten. Grund: nichtgeometrische Erhaltungssätze (z.B. Ladung, Leptonenzahl, Baryonenzahl).

Massendefekte: Die Masse eines gebundenen Systems aus den (freien) Einzelmassen m_1 und m_2 ist um den Betrag der Bindungsenergie E_b vermindert.

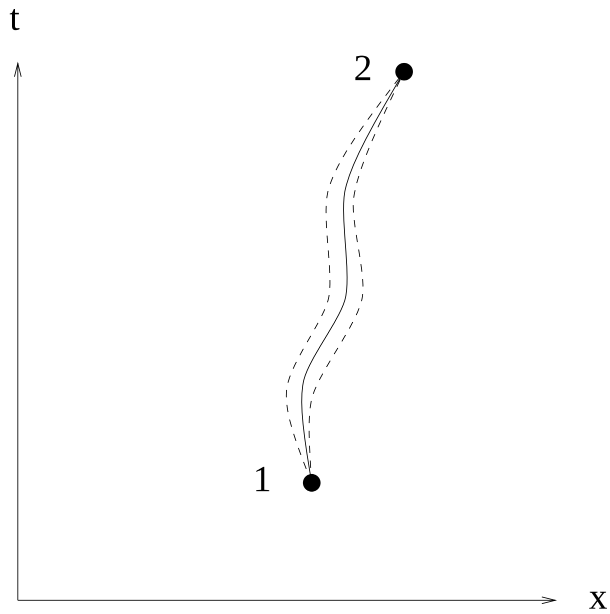
$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{E_b}{m_1 + m_2 - E_b}$$

- Wasserstoffatom: $\Delta\mu/\mu \approx 10^{-8}$ unmessbar klein.
- Atomkerne: $\Delta\mu/\mu \leq 1\%$. Test der Energie-Masse Relation auf 1 in 1000.

- Astrophysik: Bindungsenergie einer homogenen Kugel mit Masse M ist $E_b = 3/5\, GM^2/R$. Wenn Stern aus Gaswolke entsteht, bleibt ihm nur die Masse $M_1 = M - E_b$. Der Rest wird abgestrahlt.

7.5 Prinzip der kleinsten Wirkung, Lagrange-Funktion

Hamiltonsches Prinzip: Für jedes mechanische System gibt es ein *Wirkungsintegral* S, das für die wirklich stattfindende Bewegung extremal wird, d.h. dessen Variation beim Übergang zu infinitesimal benachbarten Bahnen verschwindet.



Universelles Relativitätsprinzip: S hängt nicht von der Wahl des IS ab, ist also ein Lorentz-Skalar.

Freies Teilchen: Eigenzeit zwischen zwei Ereignissen extremal. Dies motiviert den Ansatz

$$S = -\alpha \int_1^2 ds\,.$$

Konstante α wird später bestimmt!

Weltlinie des Teilchens $x^i(\lambda)$, wobei λ wie die Eigenzeit s monoton wächst.

$$ds = \sqrt{\eta_{ik}\,\frac{dx^i}{d\lambda}\,\frac{dx^k}{d\lambda}}\,d\lambda$$

Zu variierende Größen: x^i und Ableitungen

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$$

Wirkungsintegral

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\,L(x^i, \dot{x}^i)$$

Lagrange-Funktion

$$L = \sqrt{\eta_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}$$

Extremalbedingung: $\delta S = 0$ bei Variationen, die an den Endpunkten λ_1 und λ_2 verschwinden.

Herleitung der *Euler-Lagrange-Gleichungen* (für 1+1 Dimensionen, die Verallgemeinerung auf beliebig viele Koordinaten ist einfach):

Änderung von S beim Ersetzen von x durch $x + \delta x$:

$$\delta S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\, L(x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}) - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\, L(x, \dot{x})$$

Entwicklung der Differenz nach Potenzen von δx und $\delta \dot{x}$:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \left(\frac{\partial L}{\partial x}\, \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\, \delta \dot{x} \right) = 0\,.$$

Man beachte, daß $\delta \dot{x} = (d/d\lambda)\delta x$ und integriere den zweiten Term partiell:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\, \delta x \Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{d\dot{x}} \right) \delta x = 0\,.$$

Der erste Term ist Null, da die Variation der Bahn an den Endpunkten verschwindet. Integral soll für beliebige Werte von δx verschwinden.

Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

Für unseren konkreten Fall:

$$\alpha \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\dot{x}^i}{\sqrt{\eta_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}}\right] = 0$$

Identifiziere jetzt λ mit Eigenzeit s:

$$\sqrt{\eta_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k} = \sqrt{u^2} = c$$

Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = 0\,.$$

Darstellung der Wirkung in Systemkoordinaten:

$$S = -\alpha c\int_{t_1}^{t_2} dt\,\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Entwicklung von L für $v \ll c$:

$$L \approx -\alpha c + \alpha c\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

Stimmt mit Newtons Formel überein, wenn $\alpha = mc$.

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Nach den Regeln der analytischen Mechanik:

Impuls:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \gamma \, m \vec{v}$$

Hamiltonfunktion (= Energie):

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \gamma \, m \, c^2$$

Übereinstimmung mit den früheren Definitionen dieser Größen.

8 Klassische Elektrodynamik

In einer relativistisch invarianten Theorie gibt es keine instantane Fernwirkung. Wechselwirkung wird durch Felder vermittelt, die Energie und Impuls übertragen und selbständige physikalische Entitäten sind. Der Prototyp für eine solche Theorie ist die Elektrodynamik.

Lorentzkovarianz der Theorie: Gleichungen lassen sich als Gleichungen zwischen *Tensor*größen im Minkowski-Raum formulieren.

8.1 Tensoren

<u>Definition:</u> Die kontravarianten (kovarianten) Komponenten eines Tensors der Stufe r werden so transformiert wie das direkte Produkt (Tensorprodukt) von r kontravarianten (kovarianten) Vektorkomponenten, i.e.

$$T^{k_1 k_2 \dots k_r} \quad \text{transformiert wie} \quad A^{k_1} B^{k_2} \dots Z^{k_r}$$

Ausgeschrieben:

$$T^{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \dots \bar{k}_r} = \frac{\partial x^{\bar{k}_1}}{\partial x^{m_1}} \frac{\partial x^{\bar{k}_2}}{\partial x^{m_2}} \cdots \frac{\partial x^{\bar{k}_r}}{\partial x^{m_r}} T^{m_1 m_2 \dots m_r}$$

Lorentztransformationen:

$$\frac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^k} = L^{i}{}_{k}$$

ART: Koordinaten-Transformationen werden x-abhängig. Obige Tensordefinition bleibt dieselbe.

Tensoren vom Typ (p, q) haben p kontravariante und q kovariante Indizes. Beispiel: $r = p + q = 2$,

$$\begin{aligned}
T^{\bar{i}\bar{k}} &= \tfrac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^l} \tfrac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^m} T^{lm} && \text{kontravarianter Tensor} \\
T^{\bar{i}}{}_{\bar{k}} &= \tfrac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^l} \tfrac{\partial x^m}{\partial x^{\bar{k}}} T^{l}{}_{m} && \text{gemischter Tensor} \\
T_{\bar{i}\bar{k}} &= \tfrac{\partial x^l}{\partial x^{\bar{i}}} \tfrac{\partial x^m}{\partial x^{\bar{k}}} T_{lm} && \text{kovarianter Tensor}
\end{aligned}$$

Wichtige Eigenschaft von Tensoren: Zwei Tensoren sind genau dann gleich, wenn in irgendeinem Koordinatensystem alle ihre Komponenten übereinstimmen. Sie stimmen dann in *allen* Koordinatensystemen überein.

8.2 Elementare Tensor-Algebra

Die *Summe* zweier Tensoren ist wieder ein Tensor:

$$A_l^{ik} + B_l^{ik} = C_l^{ik}$$

Multiplikation mit einem *Skalar* erzeugt wieder einen Tensor vom gleichen Typ:

$$\lambda T_{ik} = B_{ik}$$

Das *direkte Produkt* zweier Tensoren ergibt einen Tensor der entsprechend höheren (i.a. gemischten) Stufe:

$$A_l{}^{ik} B^{mn} = G_l{}^{ikmn}$$

Durch *Kontraktion* (Verjüngung) erhält man Tensoren niedrigerer Stufe:

$$C^i = A^{ik} B_k$$

Beweis der Tensoreigenschaft von C:

$$\begin{aligned} C^{\bar{i}} &= A^{\bar{i}\bar{k}} B_{\bar{k}} \\ &= L^{\bar{i}}{}_l \, L^{\bar{k}}{}_m A^{lm} \, L_{\bar{k}}{}^n \, B_n \end{aligned}$$

Wegen

$$L^{\bar{k}}{}_m \, L_{\bar{k}}{}^n = \frac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x^{\bar{k}}} = \delta^n_m$$

gilt

$$C^{\bar{i}} = L^i{}_l \, A^{lm} \, B_m = L^i{}_l \, C^l$$

q.e.d.

Wichtige Beispiele für die Verjüngung:

Skalarprodukt zweier Vierervektoren (Lorentzinvariante):

$$S = A^i \, B_i$$

Verjüngung eines Tensors zweiter Stufe auf einen Skalar:

$$S = T^i_{\ i}$$

Viererdivergenz:

$$S = \partial_i \, A^i = \frac{\partial}{\partial x^i} \, A^i$$

Das *Quotiententheorem* wird an einem Beispiel erläutert:

A_{ik} Größe mit n^2 Komponenten, so daß $A_{ik} \, x^k$ einen kovarianten Vektor darstellt. Dann muß A_{ik} ein kovarianter Tensor 2. Stufe sein.

Allgemein: Wenn das Produkt $A\,B = C$ einen Tensor C ergibt, wobei B ein beliebiger Tensor ist, dann ist A ein Tensor.

8.3 Relative Tensoren

Im Transformationsgesetz tritt zusätzlich die Funktionaldeterminante in einer bestimmten Potenz auf.

Relativer Tensor vom Gewicht w:

$$R^{\bar{k}_1\ldots\bar{k}_r}_{\bar{m}_1\ldots\bar{m}_s} = \frac{\partial x^{\bar{k}_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{\bar{k}_r}}{\partial x^{l_r}} \, \frac{\partial x^{n_1}}{\partial x^{\bar{m}_1}} \cdots \frac{\partial x^{n_s}}{\partial x^{\bar{m}_s}} \, R^{l_1\ldots l_r}_{n_1\ldots n_s} \, \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^w \; .$$

Direktes Produkt von Tensoren: Gewichte addieren sich.

Beispiel: Volumenelement

$$d^n\bar{x} = d^n\,x\,\left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right| \; .$$

ist *relativer Skalar* vom Gewicht -1.

Ein relativer Tensor vom Gewicht $+1$ heißt *Tensordichte*.

Volumenenlement $\times$ Tensordichte $\rightsquigarrow$ (absoluter) Skalar

$$S = \int d^n x\, A(x)$$

Levi-Civita-Symbol:

$$\epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{für Indizes in gerader Permutation von } 1,2,\ldots, n \\ -1 & \text{für Indizes in ungerader Permutation von } 1,2,\ldots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Levi-Civita-Symbol ist eine *Tensordichte*.

8.4 Ladung im äußeren Feld

Wirkungsintegral für eine Ladungsverteilung im (vorgegebenen) äußeren Feld:

$$S = -mc \int ds - \frac{1}{c} \int dt \, d^3x \, j \cdot A$$

Zur Herleitung: Lagrange-Funktion hat Dimension einer Energie. Statische Energiedichte $\rho\phi$. Ergänze ρ und ϕ zu Vierervektoren

$$j^i = (c\rho, \vec{j})$$

$$A^i = (\phi, \vec{A})$$

und bilde das lorentzinvariante Skalarprodukt.

$L = T - U$ für kleine Geschwindigkeiten $\rightarrow$ Vorzeichen!

Punktladung mit Ladung e:

$$j^i = e(c, \vec{v})\, \delta^{(3)}\left(\vec{x} - \vec{x}(t)\right)$$

Damit

$$S = \int \left(mc\, ds + \frac{e}{c} A_i\, dx^i \right) = \int dt\, L$$

mit

$$L = -m\, c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \vec{A}\vec{v} - e\phi$$

Verallgemeinerter Impuls:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}.$$

Hamilton-Funktion:

$$H = e\phi + c\sqrt{\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + m^2\, c^2}$$

Der Übergang vom freien Teilchen zu Teilchen im äußeren Feld geschieht durch die minimale eichinvariante Substitution

$$p^i \rightarrow p^i - \frac{e}{c} A^i\,.$$

8.5 Bewegungsgleichungen von Teilchen im äußeren Feld

$$S = -\int d\lambda \left(mc\sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}} + \frac{e}{c}A_i(x)\,\frac{dx^i}{d\lambda}\right)$$

Euler-Lagrange-Gleichungen, $\lambda \to s$:

$$m\frac{du_i}{ds} + \frac{e}{c}\frac{dA_i}{ds} - \frac{e}{c}\frac{dx^k}{ds}\,\frac{\partial A_k}{\partial x^i} = 0$$

Mit

$$\frac{dA_i}{ds} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{ds}$$

ergibt sich

$$m\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \right)\, u^k$$

bzw.

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}\,u^k\,.$$

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \equiv A_{k,i} - A_{i,k}$$

Abkürzung für partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}T^{\cdots}_{\cdots} = \partial_i\,T^{\cdots}_{\cdots} = T^{\cdots}_{\cdots,i}$$

F_{ik} *Feldstärketensor* des elektromagnetischen Feldes, antisymmetrisch $\leadsto$ 6 unabhängige Komponenten:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Beziehungen:

Lorentz-Kraft:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\,\vec{E} + \frac{e}{c}\,\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$$

Ohmsches Gesetz:

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = e\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Invarianten der Feldstärke

$$\begin{aligned} I_1 &= \vec{B}^2 - \vec{E}^2 &&= \tfrac{1}{2}\,F_{ik}\,F^{ik} \\ I_2 &= -(\vec{E} \cdot \vec{B}) &&= \tfrac{1}{8}\,\epsilon^{ijkl}\,F_{ij}\,F_{kl} \end{aligned}$$

Definition des zu F^{ij} *dualen* Tensors:

$$\tilde{F}^{ij} = \epsilon^{ijkl}\, F_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Regel: Ersetze $\vec{E} \to \vec{B}$ und $\vec{B} \to -\vec{E}$!

$$I_2 = \frac{1}{4} F_{ij} \tilde{F}^{ij}$$

Alle anderen Invarianten lassen sich durch I_1 und I_2 ausdrücken!

8.6 Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form

Aus der Definition

$$F_{ij} = A_{j,i} - A_{i,j}$$

folgt

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0$$

Wegen Antisymmetrie *trivial* erfüllt falls 2 oder 3 der Indizes gleich. Die nichttrivialen vier Gleichungen ergeben die *homogenen* Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{B} &= 0 \\ \mathrm{rot}\vec{E} + \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

In kompakter Form:

$$\partial_i \tilde{F}^{ij} = 0\,.$$

Die *inhomogenen* Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{E} &= 4\pi\,\rho \\
\mathrm{rot}\vec{B} - \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \tfrac{4\pi}{c}\,\vec{j}
\end{aligned}$$

lassen sich schreiben als

$$\partial_i F^{ij} = \frac{4\pi}{c}\,j^j\,.$$

8.7 Wirkungsintegral für das Feld und Feldgleichungen

$$S = S_F + S_M + S_W$$

Forderungen:

- Invarianz gegen Lorentztransformationen
- Eichinvarianz: L Funktion der Feldstärken und nicht der Potentiale

- L muß quadratisch sein in den Feldkomponenten $\rightsquigarrow$ lineare Feldgleichungen $\rightsquigarrow$ Superpositionsprinzip der ED

$$S = \frac{1}{16\pi c} \int d^4x \, F_{ij} \, F^{ij} - \sum_i m_i c \int ds_i - \frac{1}{c^2} \int d^4 x j \cdot A$$

S_M hängt nur von den Teilchenkoordinaten ab. Feldgleichungen folgen aus

$$\delta S = \delta \left(S_F + S_W \right) = 0$$

<u>Variation in Analogie zur Mechanik</u>:

generalisierte Koordinaten	$q_i(t)$	$\phi(\vec{x}, t)$
unabhängige Variablen	i, t	$\vec{x}, t$
Lagrangefunktion	$L(q_i, \dot{q}_i)$	$\mathcal{L}(\phi, \partial_i \phi)$
Wirkungsintegral	$\int dt \, L$	$\int dt \int d^3x \, \mathcal{L}$
EL-Gleichungen	$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$	$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \phi}$

Die EL-Gleichungen ergeben die inhomogenen Maxwell-Gleichungen!

8.8 Erhaltungssätze, Noether-Theorem

Auch in der ED: In einem abgeschlossenem System gelten die Sätze von der Erhaltung der Energie, des Impulses und des Drehimpulses. Diese folgen aus der Invarianz der Theorie unter zeitlichen und räumlichen Translationen und den homogenen LT.

Mathematisches Hilfsmittel um den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen zu finden: *Noether-Theorem.*

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\psi, \partial_i\psi, x^i)$$

Symmetrie-Transformation:

$$\begin{aligned}
x^i \quad & \to x^i + \delta x^i \\
\psi(x) \quad & \to \psi(x) + \delta\psi(x) \\
\partial_i\psi(x) \quad & \to \partial_i\psi(x) + \delta\partial_i\psi(x)
\end{aligned}$$

Invarianz der Wirkung:

$$\partial_i g^i = 0$$

mit

$$g^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,i}} \delta\psi - \theta^{ij} \delta x_j$$

und

$$\theta^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,i}} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \mathcal{L}\, g^{ij}$$

Kontinuitätsgleichung für den Vierervektor g^i. Integration über die räumlichen Komponenten:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int d^3x g^0 = -\int_S d\vec{S} \cdot \vec{g}$$

Oberflächenterm verschwindet bei hinreichend gutem Abklingverhalten, wenn man die Flächen nach "unendlich" schiebt.

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int d^3x g^0 = 0$$

Allgemeine Formulierung des Noether-Theorems:
Wenn das mit der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ gebildete Wirkungsintegral S invariant ist gegenüber einer kontinuierlichen Transformationsgruppe G_n, deren Elemente analytisch von n (unabhängigen) Parametern abhängen, dann folgen bei Gültigkeit der Feldgleichungen die n Erhaltungssätze

$$
\begin{aligned}
\partial \cdot g_a &= 0, \quad a = 1, 2, \ldots, n \\
g_a^i &= \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,i}} \delta_a \psi - \theta^{ij} \delta_a x_j
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Invarianz im obigen Sinne ist immer Invarianz bis auf das Auftreten einer additiven Divergenz in der Lagrange-Funktion, die die Bewegungs-Gleichungen nicht ändert:

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial \cdot \Omega$$

Veranschaulichung des Noether-Theorems am Beispiel der *Translations-Symmetrie:*

$$x^i \to x^i + \delta\epsilon^i$$

mit konstanten (x-unabhängigen) Verschiebungen $\delta\epsilon^i$.

Wegen $\delta\psi = 0$ gilt

$$\partial_i \theta^{ij} \delta\epsilon_j = 0.$$

ϵ beliebig $\rightsquigarrow$

$$\partial_i \theta^{ij} = 0$$

Das Integral

$$P^i = \frac{1}{c}\int d^3x\theta^{0i}$$

ist zeitlich konstant.

P^i ist der *Energie-Impuls-Vektor* des Feldes.

Insbesonders:

$$P^0 = \frac{1}{c}\int d^3x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} - \mathcal{L}\right)$$

Der Integrand ist die Hamilton- (Energie-) Dichte $\mathcal{H} = \theta^{00}$.

θ^{ij} heißt *kanonischer Energie-Impuls-Tensor.*
Explizite Form für das freie elektromagnetische Feld mit Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij}$$

ist

$$\theta^{ij} = -\frac{1}{4\pi}F^{il}\partial^j A_l - \eta^{ij}\mathcal{L}_F$$

Der so bestimmte kanonische Energie-Impulstensor hat einige Nachteile (fehlende Eichinvarianz und Symmetrie). Diese Nachteile verschwinden, wenn die Invarianz gegenüber homogenen LT berücksichtigt wird.

9 Physikalische Grundlagen der ART

9.1 Beschleunigte Bezugssystem in der SRT

$x^i(\lambda)$ Weltlinie, λ beliebiger Parameter

invariantes Eigenzeitintervall:

$$ds^2 = \eta_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

$$ds = \sqrt{\eta_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda}}\, d\lambda$$

Transformation auf ein beschleunigtes Bezugssystem ist ein Spezialfall des Übergangs zu krummlinigen Koordinaten.

Beispiel:

$$t = \tilde{t}, \quad x = \tilde{x} + \frac{g}{2} t^2, \quad y = \tilde{y}, \quad z = \tilde{z}$$

Linienelement in den neuen Koordinaten:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{ik}\, dx^i\, dx^k = d\tilde{t}^2(1 - g^2\tilde{t}^2) - 2g\, \tilde{t}\, d\tilde{x}\, d\tilde{t} - d\tilde{x}^2 - d\tilde{y}^2 - d\tilde{z}^2 \\ &= g_{ik}\, dx^{\tilde{i}}\, dx^{\tilde{k}} \end{aligned}$$

Metrischer Tensor mit Komponenten $g_{\tilde{i}\tilde{k}}$

$$g_{\tilde{0}\tilde{0}} = 1 - g^2\tilde{t}^2, \quad g_{\tilde{0}\tilde{1}} = g_{\tilde{1}\tilde{0}} = g\tilde{t}, \quad g_{\tilde{1}\tilde{1}} = g_{\tilde{2}\tilde{2}} = g_{\tilde{3}\tilde{3}} = -1$$

Beschleunigte Bezugssysteme sind in der SRT zulässig, das Linienelement hat aber die allgemeinere Form

$$ds^2 = g_{\tilde{i}\tilde{k}}\, dx^{\tilde{i}}\, dx^{\tilde{k}}$$

Wegen

$$ds^2 = \eta_{ik}\, dx^i\, dx^k = \eta_{ik}\, \frac{\partial x^i}{\partial x^{\tilde{l}}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{\tilde{m}}} dx^{\tilde{l}}\, dx^{\tilde{m}} = g_{\tilde{l}\tilde{m}}\, dx^{\tilde{l}}\, dx^{\tilde{m}}$$

gilt

$$g_{\tilde{l}\tilde{m}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{\tilde{l}}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{\tilde{m}}}\, \eta_{ik}$$

Linienelement invariant bei $x \to \tilde{x}$. Abstände $S = \int ds$ hängen nur vom Integrationsweg ab, nicht aber von den verwendeten Koordinaten.

9.2 Das Äquivalenzprinzip

Schwere und trägen Masse sind mit sehr großer Genauigkeit einander proportional. Daher fallen alle Körper im Schwerefeld gleich schnell.

Einsteinsches Äquivalenzprinzip: Die Wirkung von Schwerefeldern ist (lokal) äquivalent einer Beschleunigung des Bezugssystems.

Beispiel: In einem frei um die Erde kreisendes Satellitenlabor kann die Inhomogenität des Gravitationsfeldes vernachlässigt werden. Jedes Experiment im Satelliten verläuft so, als sei das Schwerefeld der Erde nicht vorhanden. Ein auf der Erde ruhendes Labor ist relativ zu diesem IS beschleunigt. Durch die Beschleunigung treten Scheinkräfte auf (Gravitation).

Grundidee für den mathematischen Formalismus der ART:
Das Linienelement hat die Form wie in der SRT für beschleunigte Bezugssysteme angegeben:

$$ds^2 = g_{ik}(x)\, dx^i\, dx^k$$

Die g_{ik} beschreiben das Gravitationsfeld. Die g_{ik} sind aber nicht eindeutig durch das Gravitationsfeld bestimmt, da stets Koordinatentransformationen $x^i = f^i(x^{\bar{k}})$ möglich sind, die die Form der Metrik ändern. Es ist stets möglich, g_{ik} *lokal* auf die Gestalt η_{ik} zu bringen, nicht aber *global*, es sei denn, das Gravitationsfeld verschwindet.

Raum mit obigem Linienelement: *Riemannscher Raum.*

Gravitationsfeld durch die 10 Komponenten des metrischen Tensors bestimmt.

Aufgabe: Bestimme die Feldgleichungen für den metrischen Tensor und untersuche die Bewegung von Teilchen in dem Raum mit dieser Metrik.

9.3 Bewegung im Gravitationsfeld

Weltlinien von Teilchen sind Geodäten:

$$\int ds = \text{Extremum} \quad \text{bzw.} \quad \delta \int ds = 0$$

Mit

$$ds = \sqrt{g_{ik}(x)\, \dot{x}^i\, \dot{x}^k}\, d\lambda, \qquad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$$

ist die Geodätenbedingung

$$\delta \int d\lambda \sqrt{g_{ik}(x)\, \dot{x}^i\, \dot{x}^k} = \int d\lambda \mathcal{L} = 0$$

Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}$$

Einsetzen von $\mathcal{L}$:

$$\frac{1}{\mathcal{L}}\, \dot{x}^l\, \dot{x}^k g_{ik,l} - \frac{1}{\mathcal{L}^2}\, g_{ik}\, \dot{x}^k \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} + \frac{1}{\mathcal{L}}\, \ddot{x}^k\, g_{ik} = \frac{1}{2\mathcal{L}}\, g_{kl,i}\, \dot{x}^k\, \dot{x}^l$$

Mit den *Christoffel-Symbolen 1. Art:*

$$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2}(g_{ik,l} + g_{li,i} - g_{kl,i})$$

kann man dies schreiben als

$$g_{ik}\,\ddot{x}^k + \Gamma_{ikl}\,\dot{x}^k\dot{x}^l - \frac{1}{\mathcal{L}}\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda}\,g_{ik}\dot{x}^k = 0$$

Für $ds \neq 0$ wähle $\lambda = s = \int d\lambda\,\mathcal{L}$ (Eigenzeit). Dann $d\mathcal{L}/d\lambda = 0$, und

$$g_{ik}\,\ddot{x}^k + \Gamma_{ikl}\,\dot{x}^k\,\dot{x}^l = 0 \qquad (BG1)$$

Kovariante Komponenten des metrischen Tensors definiert durch

$$g_{ik}\,g^{kl} = \delta_i^l$$

Multipliziere $(BG1)$ mit g^{im} (Summationskonvention)

$$\ddot{x}^m + \Gamma^m{}_{kl}\,\dot{x}^k\,\dot{x}^l = 0$$

Christoffel-Symbole 2. Art:

$$\Gamma^m{}_{kl} = g^{im}\,\Gamma_{ikl} \qquad (BG2)$$

$(BG2)$ ist die Bewegungsgleichung eines Körpers im Gravitationsfeld g_{ik} (Geodätengleichung).

Es gibt raumartige, zeitartige und lichtartige Geodäten. Letztere nennt man *Nullgeodäten.* Auf diesen breiten sich Lichtstrahlen aus.

Bemerkung: Obige Herleitung ist nicht auf Nullgeodäten anwendbar, da für diese die Division durch $\mathcal{L}$ nicht möglich ist. Man erhält aber dieselbe Bewegungsgleichung, wenn man von

$$\delta \int d\lambda \, g_{ik}(x) \, \dot{x}^i \, \dot{x}^k$$

ausgeht.

9.4 Die Newtonsche Näherung

Im schwachen Gravitationsfeld (z.B. im Sonnensystem) ist die Geometrie in guter Näherung euklidisch, d.h. in einem geeignet gewählten KS ist die Abweichung der Metrik von η_{ik} klein:

$$g_{ik}(x) = \eta_{ik} + 2\,\psi_{ik}(x)\,,$$

mit $|\psi_{ik}(x) \ll 1|$.

Planetenbewegung langsam, daher Vierergeschwindigkeit

$$\dot{x}^k \approx (1, \vec{0})$$

Außerdem $ds \approx dt$.

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i{}_{00} = 0$$

Räumlicher Anteil:

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{00} = 0$$

Da Γ_{i00} von der Ordnung ψ ist,

$$\begin{aligned}
\Gamma^\alpha{}_{00} &= g^{\alpha i}\Gamma_{i00} \approx \eta^{\alpha i}\Gamma_{i00} \\
&= \tfrac{1}{2}\eta^{\alpha i}\left(2g_{0i,0} - g_{00,i}\right)
\end{aligned}$$

Da das Gravitationsfeld der Sonne fast statisch ist, kann man die Zeitableitung vernachlässigen:

$$\Gamma^\alpha{}_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha i}g_{00,i}$$

Damit

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha i}g_{00,i} = \eta^{\alpha i}\psi_{00,i}$$

Das kann man schreiben als

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\mathrm{grad} U$$

$U \equiv \psi_{00}$ ist das übliche Gravitationspotential. Für die Metrik in Newtonscher Näherung folgt

$$ds^2 = (1 + 2\,U)\,dt^2 - d\vec{x}^2$$

Kugelsymmetrische Massenverteilung: $U = -G\,M/r$

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2\,G\,M}{r\,c^2}\right)\,dt^2 - d\vec{x}^2$$

Schwarzschild-Radius:

$$R_S = \frac{2\,G\,M}{c^2}$$

Für die Sonne ist $R_S \approx 3$ km. Der Sonnenradius ist 700.000 km. Abweichungen von der Minkowski-Geometrie am Sonnenrand daher kleiner 10^{-5}.

Bemerkung: Obige Näherung gilt für schwache Felder und langsame Bewegungen. Für schnelle Bewegungen, z.B. von Licht, müssen Korrekturen zum Raumteil der Metrik berücksichtigt werden.

10 Riemannsche Geometrie

10.1 Riemannsche Normalkoordinaten

Geodäten sind besonders geeignete Koordinatenlinien (z.B. Kartesische Koordinaten im Euklidischen).

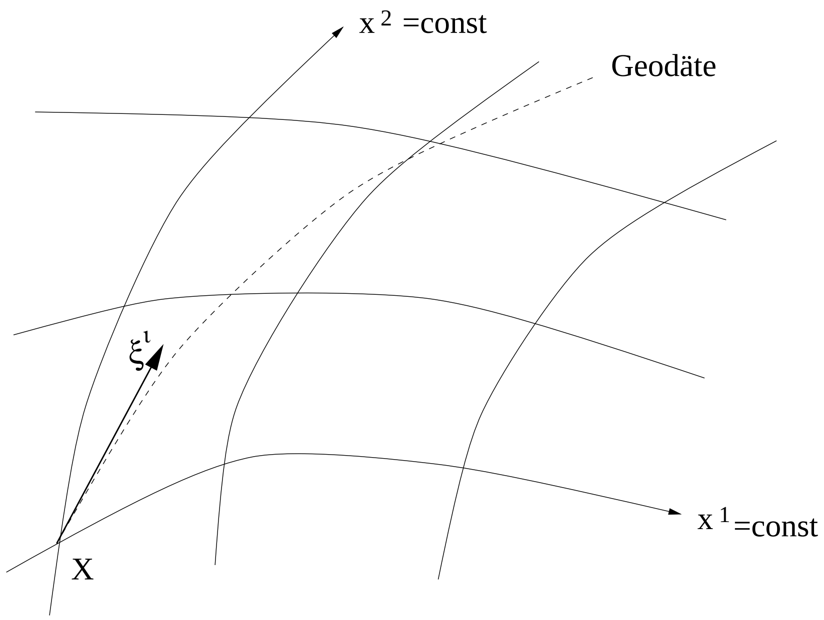
Auch in einem Riemannschen Raum nimmt die Metrik eine besonders einfache Form an, wenn man Geodäten als Koordinatenlinien verwendet (RKS = Riemannsches Koordinatensystem).

Geodätengleichung:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{kl}\,\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0.$$

Gehen aus von einem beliebigen KS. Eine Geodäte sei gegeben durch $x^i = x^i(s)$.

Ursprung des neuen Koordinatensystems: $X^i \equiv x^i(s=0)$.



Entwickle $x^i(s)$ in eine Taylorreihe nach Potenzen von s:

$$x^i = X^i + \xi^i\, s + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\right)_0 s^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3x^i}{ds^3}\right)_0 s^3 + \ldots$$

mit

$$\xi^i = \left(\frac{dx^i}{ds}\right)_0$$

Koeffizient von s^2 läßt sich vermöge der Geodätengleichung durch die Christoffel-Symbole bei X^i ausdrücken:

$$\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\right)_0 = -\Gamma^i{}_{kl}\,\xi^k\,\xi^l\,.$$

Differentiation der Geodätengleichung nach s liefert die Koeffizienten der höheren Potenzen von s:

$$\frac{d^3x^i}{ds^3} + \Gamma^i{}_{jkl}\,\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0$$

mit

$$\Gamma^i{}_{jkl} = \frac{1}{3!}\left(\Gamma^i{}_{kj,l} - \Gamma^i{}_{rk}\,\Gamma^r{}_{jl} - \Gamma^i{}_{jr}\,\Gamma^r{}_{kl} + \text{Permutationen von}(j,k,l)\right)$$

Damit für die Geodäte:

$$x^i(s) = X^i + \xi^i\, s - \frac{1}{2}\,\Gamma^i{}_{kl}\,\xi^k\,\xi^l\,s^2 - \frac{1}{3!}\,\Gamma^i{}_{klm}\xi^k\,\xi^l\,\xi^m s^3 + \ldots$$

ξ^i ist ein beliebiger Einheitsvektor, der die Richtung der Geodäte bei $s = 0$ angibt.

Definition:

$$y^i = \xi^i\, s$$

Damit

$$x^i = X^i + y^i - \frac{1}{2}\Gamma^i{}_{kl}\,y^k\,y^l + \ldots$$

Betrachte dies als implizite Definition einer Koordinatentransformation $x \to y$, d.h.

$$y^i = (x^i - X^i) + \frac{1}{2}\Gamma^i{}_{kl}\,(x^k - X^k)\,(x^l - X^l) + \ldots$$

Die neuen Koordinaten spannen das RKS auf, da die Koordinatenlinien $y^i = \xi^i\, s$ Geodätische sind.

Linienelement im RKS:

$$ds^2 = \bar{g}_{ij}\, dy^i\, dy^j$$

Geodätengleichung im RKS,

$$\frac{d^2y^i}{ds^2} + \bar{\Gamma}^i{}_{kl}(y)\,\frac{dy^k}{ds}\frac{dy^l}{ds} = 0$$

wird von den $y^i = \xi^i\, s$ im Ursprung gelöst:

$$\bar{\Gamma}^i{}_{kl}\,\xi^k\,\xi^l = 0$$

Da ξ^k beliebig:

$$\bar{\Gamma}^i{}_{kl}(0) = 0$$

Wegen der Symmetrie-Eigenschaft

$$\bar{\Gamma}_{lik} = \bar{\Gamma}_{lki}$$

folgt

$$\bar{g}_{ik,l}(0) = 0$$

Daher

$$\bar{g}_{ik}(y) = \bar{g}_{ik}(0) + c_{iklm}\, y^l\, y^m + \dots$$

Man kann stets erreichen, daß $\bar{g}_{ik}(0) = \eta_{ik}$ (Riemannsche *Normalkoordinaten*).

Ursprüngliche Koordinaten $x^i \to x^{\bar{i}}$:

$$y^{\bar{i}} = \xi^{\bar{i}}\, s = \left(\frac{dx^{\bar{i}}}{ds}\right)_0 s = \left(\frac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^k}\right)_0 \left(\frac{dx^k}{ds}\right)_0 s = \left(\frac{\partial x^{\bar{i}}}{dx^k}\right)_0 \xi^k s = \left(\frac{\partial x^{\bar{i}}}{dx^k}\right)_0 y^k$$

Die Riemannschen Koordinaten erfahren daher bei beliebigen Koordinatenänderungen eine lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten. Diese Freiheit kann man benutzen, um die $\bar{g}_{ik}(0)$ auf die Form η_{ik} zu bringen.

10.2 Die kovariante Ableitung

Die gewöhnliche Ableitung eines Tensors nach den Koordinaten transformiert sich im allgemeinen *nicht* wie ein Tensor. Dies liegt daran, daß der Vergleich von Vektoren an zwei verschiedenen Raumzeit-Punkten erst nach einem (im gekrümmten Raum nichttrivialen) Paralleltransport möglich ist.

Definitionen:

$$\begin{aligned} p^{\bar{i}}{}_{k} &= \tfrac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^{k}} \\ p^{k}{}_{\bar{i}} &= \tfrac{\partial x^{k}}{\partial x^{\bar{i}}} \\ p^{\bar{i}}{}_{kl} &= \tfrac{\partial^2 x^{\bar{i}}}{\partial x^{k} \partial x^{l}} \end{aligned}$$

Relationen aus der Kettenregel:

$$\begin{aligned} p^{\bar{l}}{}_{k}\, p^{k}{}_{\bar{i}} &= \delta^{\bar{l}}_{\bar{i}} \\ p^{\bar{k}}{}_{l}\, p^{i}{}_{\bar{k}} &= \delta^{i}_{l} \end{aligned}$$

Die Ableitung eines Skalars transformiert sich wie ein (kovarianter) Vektor:

$$\phi_{,\bar{i}}(\bar{x}) = \frac{\partial x^k}{\partial x^{\bar{i}}}\, \phi_{,k}(x) = p^{k}{}_{\bar{i}}\, \phi_{,k}(x)$$

Ableitung eines Vektors:

$$A^{\bar{i}}{}_{,\bar{k}} = \frac{\partial x^l}{\partial x^{\bar{k}}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(p^{\bar{i}}{}_r \, A^r \right) = p^l{}_{\bar{k}} \, p^{\bar{i}}{}_{rl} \, A^r + p^l{}_{\bar{k}} \, p^{\bar{i}}{}_r \, A^r{}_{,l} \qquad (KA)$$

Der erste Term auf der rechten Seite stört. Er tritt auf, weil die $p's$ von x abhängen.

Ausweg: Definiere die Ableitung in einem RNKS bei x. Geht man dann auf ein anderes RNKS bei x über, so sind die Transformationskoeffizienten konstant, und der störende Term tritt nicht auf.

Definition der *kovarianten Ableitung* in einem beliebigen Koordinatensystem durch

$$A^i{}_{;k} = p^i{}_{\bar{l}}(x) \, p^{\bar{m}}{}_k(x) \, A^{\bar{l}}{}_{,\bar{m}} \qquad (KB)$$

Querstriche markieren ein RNKS mit $g_{ik} = \eta_{ik}$.

Um einen expliziten Ausdruck für die kovariante Ableitung zu finden, setze (KA) in (KB) ein:

$$
\begin{aligned}
A^i{}_{;k} &= p^i{}_{\bar{l}}\, p^{\bar{m}}{}_k\, A^{\bar{l}}{}_{,\bar{m}} = p^i{}_{\bar{l}}\, p^{\bar{m}}{}_k\, \left(p^{\bar{l}}{}_a\, p^b{}_{\bar{m}}\, A^a{}_{,b} + p^b{}_{\bar{m}}\, p^{\bar{l}}{}_{ab}\, A^a \right) \\
&= A^i{}_{,k} + p^i{}_{\bar{l}}\, p^{\bar{l}}{}_{ak}\, A^a
\end{aligned}
$$

Zur Auswertung des zweiten Terms differenziere die Relation

$$
g_{ak} = p^{\bar{l}}{}_a\, p^{\bar{m}}{}_k\, \eta_{\bar{l}\bar{m}}
$$

nach x^r:

$$
g_{ak,r} = \left(p^{\bar{l}}{}_{ar}\, p^{\bar{m}}{}_k + p^{\bar{l}}{}_a\, p^{\bar{m}}{}_{kr} \right)\, \eta_{\bar{l}\bar{m}}
$$

Durch Permutation der Indizes:

$$
\Gamma_{rak} = p^{\bar{l}}{}_{ak}\, p^{\bar{m}}{}_r\, \eta_{\bar{l}\bar{m}}
$$

Es gilt

$$
\Gamma^i{}_{ak} = g^{ir}\, \Gamma_{rak} = \eta^{\bar{b}\bar{c}}\, p^i{}_{\bar{b}}\, p^r{}_{\bar{c}}\, p^{\bar{l}}{}_{ak}\, p^{\bar{m}}{}_r\, \eta_{\bar{l}\bar{m}} = p^{\bar{l}}{}_{ak}\, p^i{}_{\bar{l}}
$$

Das endgültige Resultat für die kovariante Ableitung ist daher

$$A^i{}_{;k} = A^i{}_{,k} + \Gamma^i{}_{ka}\, A^a$$

Tensoreigenschaft folgt aus der Definition, kann aber auch explizit nachgerechnet werden.

Kovariante Ableitung *anderer Tensortypen*:

Für einen Skalar stimmen gewöhnliche und kovariante Ableitung überein. Daher:

$$\phi_{;k} = (A^i\, B_i)_{;i} = A^i{}_{;k}\, B_i + A^i\, B_{i;k} = \phi_{,k} = A^i{}_{,k}\, B_i + A^i\, B_{i,k}$$

Haben für die kovariante Ableitung die *Produktregel* gefordert.

Da A und B beliebige Vektoren, folgt

$$B_{i;k} = B_{i,k} - \Gamma^l{}_{ik}\, B_l$$

Das Transformationsverhalten von Tensoren beliebiger Stufe ergibt sich aus dem Verhalten des Produkts entsprechend vieler ko- bzw. kontravarianter Vektoren:

$$T^{ik\ldots}{}_{lm\ldots;r} = T^{ik\ldots}{}_{lm\ldots,r} \;\; + \Gamma^{i}{}_{rs}\, T^{sk\ldots}{}_{lm\ldots} + \Gamma^{k}{}_{rs}\, T^{is\ldots}{}_{lm\ldots} + \ldots$$

$$- \Gamma^{s}{}_{rl}\, T^{ik\ldots}{}_{sm\ldots} - \Gamma^{s}{}_{rm}\, T^{ik\ldots}{}_{ls\ldots} - \ldots$$

Sämtliche Komponenten des metrischen Tensors sind *kovariant konstant*:

$$g_{ik;l} = g^{ik}{}_{;l} = 0$$

Dies erleichtert das Hinauf- und Hinunterziehen von Indizes erheblich, z.B.

$$A^{i}{}_{;k} = \left(g^{il}\, A_l\right)_{;k} = g^{il}\, A_{l;k}$$

Definition der *absoluten Ableitung eines Vektorfeldes entlang einer Kurve:*

$$C : \tau \to x^i(\tau)$$

$$\frac{DA^i}{D\tau} = A^{i}{}_{;k}\, \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{dA^i}{d\tau} + \Gamma^{i}{}_{kj}\, A^j\, \frac{dx^k}{d\tau}$$

Ein Vektor heißt *entlang der Kurve C parallelverschoben*, wenn

die absolute Ableitung längs C verschwindet, $Dv^i/Ds = 0$.
Bei Parallelverschiebung entlang eines infinitesimalen Stückes dx^i ändern sich die Vektorkomponenten um

$$dv^i = -\Gamma^i{}_{kl}\, v^k\, dx^l$$

Bei Parallelverschiebung entlang einer Geodäten C ändert sich der Winkel zwischen dem Tangentialvektor an C und dem verschobenen Vektor nicht.

10.3 Der Riemannsche Krümmungstensor

Anders als bei gewöhnlichen partiellen Ableitungen ist die Reihenfolge der Differentiation bei kovarianten Ableitungen *nicht* egal.

Skalar:

$$\phi_{;i;j} = (\phi_{;i})_{;j} = (\phi_{,i})_{;j} = \phi_{,ij} - \phi_{,m}\, \Gamma^m{}_{ij}$$

In i, j symmetrisch wegen der entsprechenden Eigenschaft der Christoffelsymbole.

Vektor:

$$
\begin{aligned}
A_{i;k;j} &= \left(A_{i;k}\right)_{,j} - A_{m;k}\,\Gamma^m{}_{ji} - A_{i;m}\,\Gamma^m{}_{jk} \\
&= A_{i,jk} - A_{m,j}\,\Gamma^m{}_{ik} - A_m\,\Gamma^m{}_{ik,j} - A_{i,m}\,\Gamma^m{}_{kj} \\
&+ A_r\,\Gamma^r{}_{mi}\Gamma^m{}_{kj} - A_{m,k}\,\Gamma^m{}_{ji} + A_r\,\Gamma^m{}_{ji}\,\Gamma^r{}_{mk}
\end{aligned}
$$

Vertauschen der Ableitungen nach i und j ergibt die *Ricci-Identität*:

$$
A_{i;k;j} - A_{i;j;k} = A_r\,R^r{}_{ikj}
$$

mit dem *Riemannschen Krümmungstensor*

$$
R^r{}_{ikj} = \Gamma^r{}_{ij,k} - \Gamma^r{}_{ik,j} + \Gamma^r{}_{mk}\,\Gamma^m{}_{ij} - \Gamma^r{}_{mj}\,\Gamma^m{}_{ik}
$$

Die Tensoreigenschaft des Riemann-Tensors folgt aus dem Quotiententheorem.

Vollständig kovarianter Riemann-Tensor:

$$
R_{hijk} = R^r{}_{ijk}\,g_{hr}
$$

Durch leichte aber lange Rechnung kann man die folgende äquivalente Darstellungen finden:

$$R_{hijk} = \Gamma_{hik,j} - \Gamma_{hij,k} + \Gamma^l{}_{ij}\Gamma_{lhk} - \Gamma^l{}_{ik}\Gamma_{lhj}$$

$$R_{hijk} = \frac{1}{2}\left(g_{hk,ij} + g_{ij,hk} - g_{ik,jh} - g_{jh,ik}\right) + g^{lm}\left(\Gamma_{mij}\,\Gamma_{lhk} - \Gamma_{mik}\,\Gamma_{lhj}\right)$$

Aus der letzten Darstellung liest man die Symmetrie-Eigenschaften ab:

$$R_{hijk} = -R_{ihjk}$$

$$R_{hijk} = -R_{hikj}$$

$$R_{hijk} = R_{jkhi}$$

$$R_{hijk} + R_{hjki} + R_{hkij} = 0$$

Riemann hat nur 20 unabhängige Komponenten.

Riemann ist von zentraler Bedeutung für die ART. Sein Verschwinden in irgendeinem Koordinatensystem bedeutet, daß der Raum lokal flach ist, d.h. jeder Punkt hat eine Umgebung, in der ein Koordinatensystem existiert mit $g_{ik} = \eta_{ik}$.

Von zentraler Bedeutung sind später:

Ricci-Tensor:

$$R_{ik} = R^h{}_{ikh} = R_{ki}$$

Krümmungs-Skalar:

$$R = R_{ik}\, g^{ik}$$

Durch kovariante Ableitung der Definitionsgleichung für Riemann ergeben sich die *Bianchi-Identitäten*:

$$R^h{}_{ijk;l} + R^h{}_{ikl;j} + R^h{}_{ilj;k} = 0$$

Kontraktion der Bianchi-Identitäten über die Indizes h und j:

$$R_{ik;l} - R^h{}_{ikl;h} - R_{il;k} = 0$$

Multiplikation mit g^{il} ergibt

$$R^h{}_{k;h} = \frac{1}{2}\, R_{;k}$$

Dies kann man auch in der Form

$$G^i{}_{k;i} = 0\,, \qquad\qquad G^i{}_k = R^i{}_k - \frac{1}{2}\delta^i{}_k\, R$$

schreiben.

Die Divergenz des *Einstein-Tensors* $G^i{}_k$ verschwindet. Dies wird von zentraler Bedeutung für die ART sein. In 4 Raumzeit-Dimensionen ist nämlich G_{ik} neben dem metrischen Tensor der einzige divergenzfreie Tensor, der aus g_{ik} und dessen zweiten Ableitungen gebildet werden kann.

11 Gravitationstheorie

11.1 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Vorgehensweise: Postuliere die Einsteinschen Feldgleichungen und studiere einige ihrer Eigenschaften und Lösungen.

$$\underbrace{R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R}_{G_{ik}} = -\kappa \, T_{ik}$$

mit

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 1.86 \cdot 10^{-27} \, \mathrm{cm/g}$$

- T_{ik} symmetrischer Energie-Impulstensor der Materie
- 10 partielle DGL zweiter Ordnung zur Bestimmung der g_{ik}
- *linear* in den zweiten Ableitungen der Metrik
- *nichtlinear* in den zweiten Ableitungen der Metrik

EG können aus einem Variationsprinzip hergeleitet werden:

$$S = \int d^4x \, \sqrt{-g} \, \left(\frac{R}{2\kappa} + L_M(A, g_{ik}) \right)$$

- g: Determinante des metrischen Tensors
- $d^4x\,\sqrt{-g}$: invariantes Integrations-Maß
- $L_M(A, g_{ik})$ Lagrangefunktion der Materie, z.B. für ein skalares Feld
$$L_M = \frac{1}{2}\left(g^{ik} A_{,i}\, A_{,k} - m^2\, A^2\right)$$

EG aus Variation von S nach den g_{ik}, Bewegungsgleichungen der Materie-Felder durch Variation nach den A

Lösung der EG eindeutig bei physikalisch richtigen Randbedingungen? NEIN!

Die Bianchi-Identitäten

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}\, R\right)^{;k} = 0, \qquad i = 0, \ldots, 3$$

ergeben vier Relationen. Bleiben sechs unabhängige Gleichungen für die zehn Freiheitsgrade der Metrik. Die vier überzähligen Freiheitsgrade entsprechen den Koordinatentransformationen

$$x^{\bar{i}} = f^i\left(x^k\right)$$

Vergleiche Eichfreiheit in der Elektrodynamik.

Bianchi-Identitäten $\rightsquigarrow$ Erhaltungssatz für Energie-Impulstensor

$$T_{ik}{}^{;k} = 0$$

EG sind nur bei erhaltenem Energie-Impulstensor konsistent. Vergleiche Maxwellgleichungen, wo ein erhaltener Strom Konsistenzbedingung ist.

Randbedingungen für die EG:

- Betrachte ein *Abgeschlossenes System*, der Einfluß aller übrigen Objekte im Weltall wird vernachlässigt. Gravitationsfelder asymptotisch wie $1/r$, Metrik $\rightarrow \eta_{ik}$.
- Weltall als Ganzes $\rightarrow$ *Kosmologie*. Randbedingungen werden durch Homogenitätsforderungen ersetzt ("kosmologisches Prinzip")
- *Anfangswertproblem*, z.B. für numerische Rechnungen. Auf einer raumartigen Hyperfläche seien die Werte der g_{ik} und deren ersten Normalen-Ableitungen gegeben. EG bestimmt die Zeitentwicklung von der Hyperfläche weg eindeutig (bis auf die Freiheit der Koordinatentransformation).

11.2 Die lineare Näherung der EG

Im geeigneten Limes soll Newtons Theorie herauskommen. Schwache Gravitationsfelder:

$$g_{ik} = \eta_{ik} + 2\,\psi_{ik}$$

Terme $\simeq \psi^2$ vernachlässigbar. Zusammenhangskoeffizienten sind von erster Ordnung in den ψ,

$$\Gamma_{jik} = \psi_{ji,k} + \psi_{kj,i} - \psi_{ik,j}$$

so daß in *Riemann* Terme $\simeq \Gamma^2$ vernachlässigbar:

$$R^i{}_{kjm} = \Gamma^i{}_{km,j} - \Gamma^i{}_{kj,m}$$

Ricci:

$$R_{km} = \psi_{km}{}^{,i}{}_i + \psi^i{}_{i,km} - \psi^i{}_{m,ik} - \psi^i{}_{k,mi}$$

Kontraktion ergibt den *Krümmungsskalar*:

$$R = 2\,\psi^i{}_{i,}{}^k{}_k - 2\psi^{ik}{}_{,ik}$$

Indizes wurden im Rahmen der Näherung mit η gezogen.

Einsetzen liefert die *linearisierten* EG:

$$\psi_{km,i}{}^{i} + \psi^{i}{}_{i,km} - \psi^{i}{}_{m,ik} - \psi^{i}{}_{k,im} + \eta_{km}\,\psi^{ij}{}_{,ij} - \eta_{km}\,\psi^{i}{}_{i,}{}^{j}{}_{j} - = -\kappa\, T_{km}$$

Zur *Entkopplung* nutze die Freiheit der Koordinatentransformation

$$x^{i} = x^{\bar{i}} + 2\,\Lambda^{\bar{i}}(x)$$

Λ klein, so daß Λ^2 vernachlässigbar.

$$g_{\bar{i}\bar{k}} = \eta_{\bar{i}\bar{k}} + 2\psi_{\bar{i}\bar{k}} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{\bar{i}}}\frac{\partial x^{m}}{\partial x^{\bar{k}}} g_{jm} = (\delta^{j}{}_{\bar{i}} + 2\Lambda^{j}{}_{,\bar{i}})(\delta^{m}{}_{\bar{k}} + 2\Lambda^{m}{}_{,\bar{k}})(\eta_{jm} + 2\,\psi_{jm})$$

Daher

$$\psi_{\bar{i}\bar{k}} = \psi_{ik} + \Lambda_{i,k} + \Lambda_{k,i}$$

Man kann explizit nachrechnen, daß $\psi_{\bar{i}\bar{k}}$ die linearisierten EG erfüllt, falls diese von ψ_{ik} gelöst werden. Dieses Phänomen ist völlig analog zur Eichinvarianz in der *Elektrodynamik.*

Entkopplung der Gleichungen durch *Eichfixierung.*

Harmonische Koordinaten:

$$\psi_{ik}{}^{,k} = \frac{1}{2}\,\psi^{k}{}_{k,i}$$

In diesen Koordinaten

$$R_{ik} = \Box\,\psi_{ik}, \qquad R = \Box\,\psi_{i}{}^{i}$$

Linearisierte EG:

$$\Box\left(\psi_{km} - \frac{1}{2}\eta_{km}\,\psi_{l}{}^{l}\right) = -\kappa\,T_{km}$$

Spurbildung:

$$\Box\psi_{l}{}^{l} = \kappa\,T_{l}^{l}$$

Finale Form der LEG in harmonischer Eichung:

$$\Box\psi_{km} = -\kappa\left(T_{km} - \frac{1}{2}\eta_{km}\,T_l^{\ l}\right)$$

Herleitung des Newtonschen Grenzfalls: Quellen ohne starken inneren Druck (kleine Dichte) und mit kleinen Geschwindigkeiten:

$$T_{km} = \rho\,\delta_{k,0}\,\delta_{m,0}$$

ergibt

$$\psi_{00} = \psi_{11} = \psi_{22} = \psi_{33}$$

wobei

$$-\Box\psi_{00} = \frac{4\pi G}{c^2}\,\rho \approx \Delta\psi_{00}$$

Newtonsches Gravitationspotential:

$$\psi_{00} = U/c^2$$

Linienelement:

$$ds^2 = c^2\, dt^2 \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) - d\vec{x}^2 \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)$$

Die gewonnene Näherung geht über die im Rahmen der Newtonschen Näherung für die Geodätengleichung gewonnene Metrik hinaus. Die bisher gewonnenen Resultate reichen bereits zur Berechnung von *Lichtablenkung* und *Rotverschiebung*, nicht aber für die Berechnung der *Periheldrehung* des Merkur.

Allgemeine Lösung der LEG mithilfe der retardierten Greensfunktion

$$G(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}\, \delta(|\vec{x}| - t)$$

$$\psi_{ik}(\vec{x}, t) = -2\, G \int d^3x' \, \frac{T_{ik}(\vec{x}', t') - \frac{1}{2}\, \eta_{ik}\, T_l{}^l(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

wobei

$$t' = t - |\vec{x} - \vec{x}'|$$

Einzige vorgenommene Näherung: $|\psi_{ik}| \ll 1$

11.3 Die Schwarzschild-Metrik

Die Schwarzschild-Metrik ist eine exakte kugelsymmetrische Lösung der EG im Vakuum,

$$R_{ik} = 0$$

Allgemeine Form des Linienelements:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2\, g_{0\alpha}\, dx^0\, dx^\alpha + g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

Rotationssymmetrie bedeutet, daß das Linienelement invariant ist unter räumlichen Drehungen, d.h. Koordinatentransformationen

$$x^{\bar{\alpha}} = D^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\, x^\beta, \qquad D\, D^T = \mathbf{1}$$

Allgemeinste Koeffizientenfunktionen, die diese Forderung erfüllen, sind von der Form

$$\begin{aligned} g_{00} &= \quad f(r, x^0) \\ g_{0\alpha} &= -g(r, x^0)\, x^\alpha / r \\ g_{\alpha\beta} &= -h(r, x^0)\, \delta_{\alpha\beta} - j(r, x^0)\, x^\alpha\, x^\beta / r^2 \end{aligned}$$

mit

$$r^2 = \delta_{\alpha\beta}\, x^\alpha\, x^\beta \qquad dr = \delta_{\alpha\beta} \frac{x^\alpha\, dx^\beta}{r}$$

Polarkoordinaten:

$$d\vec{x}^2 = dr^2 + r^2\, d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\Theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$$

Mit der Definition $x^0 = t$

$$ds^2 = f(r,t)\, dt^2 - 2g(r,t)\, dr\, dt - [h(r,t) + j(r,t)]\, dr^2 - r^2\, h(r,t)\, d\Omega^2$$

Nutze vermutete Zeitunabhängigkeit des Linienelements nicht aus, da sie von selbst herauskommt.

Koordinatentransformationen der Form

$$r = u(\bar{r}, \bar{t}), \qquad t = v(\bar{r}, \bar{t}) \qquad\qquad (KT)$$

Neue Radialkoordinate durch

$$r^2\, h(r,t) = \bar{r}^2, \qquad t = \bar{t}$$

Alle Koeffizientenfunktionen ändern sich, z.B. $f \to \bar{f}$. Aus Bequemlichkeit lassen wir den Querstrich weg.

$$ds^2 = f(r,t)\,dt^2 - 2\,g(r,t)\,dr\,dt - [h(r,t) + j(r,t)]\,dr^2 - r^2\,d\Omega^2$$

Durch Transformation der Zeitkoordinate kann man den gemischten Term $\simeq dr\,dt$ wegschaffen.

$$t = v(\bar{r},\bar{t}), \qquad r = \bar{r}$$

Differentiation:

$$dt = \frac{\partial v}{\partial \bar{t}}\,d\bar{t} + \frac{\partial v}{\partial \bar{r}}\,dr$$

Gemischter Term in der transformierten Metrik,

$$2\,\frac{\partial v}{\partial \bar{t}}\left(f\frac{\partial v}{\partial r} - g\right) dr\,d\bar{t}$$

verschwindet, wenn die r-Abhängigkeit von $v(r,\bar{t})$ gemäß

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{g(v,r)}{f(v,r)}$$

gewählt wird.

Linienelement kann also in die Form

$$ds^2 = e^\nu \, dt^2 - e^\lambda \, dr^2 - r^2 \, d\Omega^2$$

mit $\nu = \nu(r,t)$ und $\lambda = \lambda(r,t)$ gebracht werden.

Nach längerer Rechnung findet man für die nichtverschwindenden Komponenten des Einstein-Tensors

$$G^1{}_1 = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu_r}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \qquad (A)$$

$$\begin{aligned} G^2{}_2 = G^3{}_3 = \; & \tfrac{1}{2} \, e^{-\lambda} \left(\nu_{rr} + \tfrac{\nu_r^2}{2} + \tfrac{\nu_r - \lambda_r}{r} - \tfrac{\nu_r \lambda_r}{2} \right) \\ & - \tfrac{1}{4} \, e^{-\nu} \left(2\lambda_{tt} + \lambda_t^2 - \lambda_t \, \nu_t \right) \qquad (B) \end{aligned}$$

$$G^0{}_0 = \frac{1}{r^2} \, e^{-\lambda} (1 - \lambda_r \, r) - \frac{1}{r^2} \qquad (C)$$

$$G^0{}_1 = e^{-\lambda} \, \lambda_t / r \qquad (D)$$

Aus (D) folgt $\lambda_t = 0$. Subtraktion von (A) und (C) ergibt

$$\lambda_r + \nu_r = 0$$

und daher

$$\lambda + \nu = q(t), \qquad q \text{ beliebige Funktion der Zeit}$$

Transformation der Zeitkoordinaten

$$\bar{t} = \int_{t_0}^{t} dt' \; \exp[q(t')/2]$$

bewirkt $\nu \to \nu - q$, so daß mit dieser Zeitkoordinate

$$\nu = -\lambda$$

Multiplikation von (C) mit $r^2\,e^\lambda$

$$r\,\lambda_r = 1 - e^\lambda \qquad \int \frac{d\lambda}{1 - e^\lambda} = \int \frac{dr}{r}$$

Mit $e^\lambda = 1/\Phi$:

$$\ln r = -\ln|1 - \Phi| + C$$

Definiere $C = \ln(2\,M)$:

$$\Phi = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M}{r}$$

Schwarzschild-Linienelement

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\,dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\,dr^2 - r^2\,d\Omega^2$$

$2M$ ist der Schwarzschildradius R_S.

Bemerkungen:

- Metrik statisch als Konsequenz der EG
- Einzige Integrationskonstante R_S, keine Abhängigkeit von der expliziten Form des Energie-Impulstensors. Feld im Außenraum eines kugelförmigen Körpers ist unabhängig von der Zusammensetzung des Körpers. Dieser darf sogar oszillieren.
- *Birkhoff-Theorem*: Die Schwarzschild-Lösung ist die einzige kugelsymmetrische Lösung der ART
- Gleichung (B) wurde nicht benutzt. Sie ist als Konsequenz der Bianchi-Identitäten automatisch gelöst.
- Die Singularität des Koeffizienten g_{11} bei $r = R_S$ ist eine Koordinatensingularität.

12 Tests der ART

12.1 Rotverschiebung von Spektrallinien

ART-Rechnung zur Frequenzverschiebung von Photonen, die in einem Gravitationspotential die Differenz ΔU durchlaufen, ergibt das Resultat

$$\frac{\Delta \nu_0}{\nu_0} = \frac{\Delta U}{c^2}$$

Dies stimmt mit dem Resultat der klassischen Rechnung mithilfe des Energiesatzes überein, wenn man den Photonen vermöge

$$E = h\,\nu$$

die Masse

$$m = E/c^2 = h\,\nu/c^2$$

zuschreibt.

Die entsprechenden Experimente testen daher nicht die Struktur der Feldgleichungen.

12.2 Lichtablenkung und Periheldrehung

Gesucht: Geodäten in der Schwarzschildmetrik.

Legen zugrunde:

$$ds^2 = e^\nu\, dt^2 - e^\lambda\, dr^2 - e^\mu\, r^2\, \underbrace{\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)}_{d\Omega^2}$$

Variationsprinzip:

$$\delta \int d\lambda\, K = 0, \qquad K = e^\nu \dot{t}^2 - e^\lambda\, \dot{r}^2 - e^\mu\, r^2\, \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2\right)$$

Benutze K statt $\sqrt{K}$, dies erlaubt die Bestimmung von Nullgeodäten.

Bewegungsgleichungen bezüglich eines affinen Parameters $\bar{\lambda}$:

$$\frac{d}{d\bar{\lambda}}\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial K}{\partial x^i}$$

t und ϕ kommen in K nicht explizit vor (zyklische Variable):

$$-\frac{\partial K}{\partial \dot{\phi}} = 2\, e^\mu\, r^2\, \sin^2\theta\, \dot{\phi} = \text{const} = 2\, l \qquad (A)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{t}} = 2\, e^{\nu}\, \dot{t} = \text{const} = 2\, F \qquad (B)$$

Bewegungsgleichung für θ:

$$2\, e^{\mu}\, r^2\, \sin\theta\, \cos\theta \dot{\phi}^2 = 2\frac{d}{d\bar{\lambda}}\left(e^{\mu}\, r^2\, \dot{\theta}\right) \qquad (C)$$

Aus (C) folgt, daß die Bewegung in der Äquatorebene bleibt, wenn anfangs $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$.

(A) vereinfacht sich dann zu

$$e^{\mu}\, r^2\, \dot{\phi} = l$$

Statt BG für r aufzustellen, nutze aus, daß $K = \text{const}$ ein Integral der Bewegungsgleichungen ist:

- $K = 0$ für Nullgeodätische (Lichtstrahlen)
- $K = 1$ für die auf die Eigenzeit $\bar{\lambda} = s$ bezogenen zeitartigen Geodäten.

Haben also DGL $(a), (b), (c)$

$$e^{\mu}\, r^2\, \dot{\phi} = l, \quad e^{\nu}\, \dot{t} = F, \quad e^{\nu}\, \dot{t}^2 - e^{\lambda}\, \dot{r}^2 - e^{\mu}\, r^2\, \dot{\phi}^2 = K \quad (K = 0, 1)$$

Schwarzschildmetrik: $e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - 2M/r$, $\mu = 0$.

Einsetzen in (c), $\dot{t}$ und $\dot{\phi}$ mit (a) und (b) eliminieren:

$$\begin{aligned}
\dot{t}\,(1 - 2M/r) &= F \\
r^2\,\dot{\phi} &= l \\
\tfrac{\dot{r}^2}{2} - \tfrac{MK}{r} + \tfrac{l^2}{2r^2} - \tfrac{M\,l^2}{r^3} &= \tfrac{F^2 - K}{2}
\end{aligned}$$

$K = 1$: Form der Gleichung wie Energiesatz eines Teilchens in einem Radial-Potential:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) &= E \\
V_{\text{eff}} &= -\tfrac{M}{r} + \tfrac{l^2}{2r^2} - \tfrac{M\,l^2}{r^3} \\
E &= (F^2 - 1)/2
\end{aligned}$$

ART liefert Zusatzterm $M\,l^2/r^3$. Drehimpulssatz $r^2\,\dot{\phi} = l$ wie klassisch, ausser daß t durch s ersetzt ist.

Für Photonen ($K = 0$):

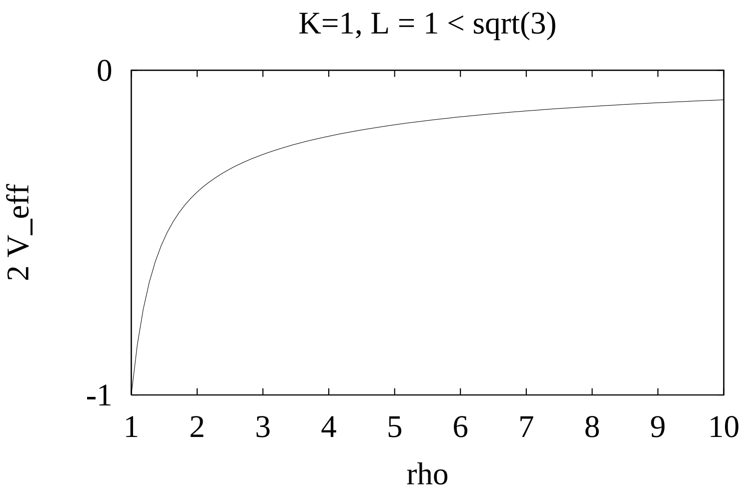
$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{M\,l^2}{r^3}$$

Graphische Diskussion der möglichen Lösungen. Mit $2M = R_S$ definiere

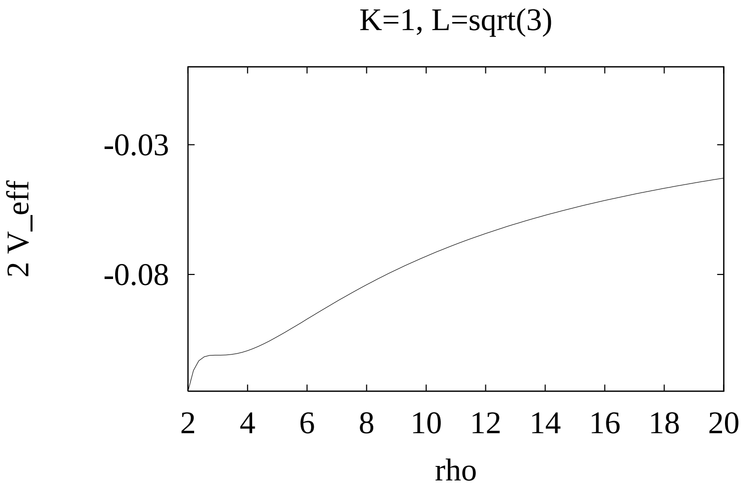
$$\rho = r/R_S$$
$$L = l/R_S$$

Für $K = 1$:

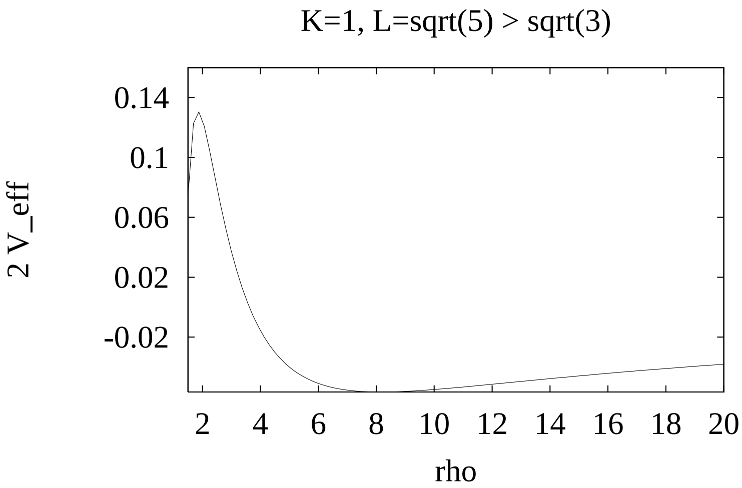
$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\rho} + \frac{L^2}{\rho^2} - \frac{L^2}{\rho^3}\right)$$



Potential für kleine r stark anziehend. Teilchen fallen ungehindert in den Ursprung. Dies ist im Newtonschen Fall nur für $l = 0$ möglich.



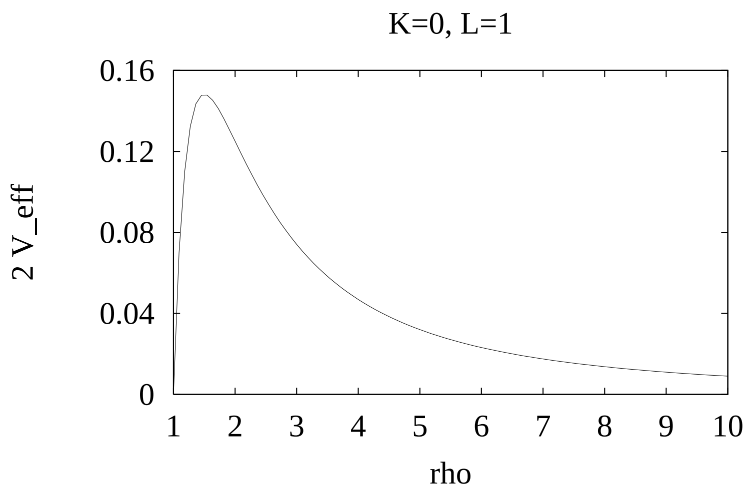
Es bildet sich ein Sattel bei $\rho = 3$ aus.



Es bilden sich zwei Extrema aus, zwischen denen gebundene Bewegung möglich ist. Für hinreichend hohe Energien kann die Potentialbarriere überwunden werden.

Für $K = 0$:

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{\rho^2} - \frac{L^2}{\rho^3}\right)$$



$l \neq 0$ ist nur ein Skalenparameter. Für $\rho = 3/2$, d.h. $r = 3M$, ist eine instabile Kreisbahn möglich.

Berechnung der *Form der Bahnkurve*:
Eliminiere $\dot{t}$ aus (c) mithilfe von (b), schreibe $\dot{r} = (dr/d\phi)\,\dot{\phi}$, eliminiere dann $\dot{\phi}$ mithilfe von (a):

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = e^{2\mu-\lambda-\nu}\frac{F^2\,r^4}{l^2} - K\,e^{2\mu-\lambda}\,\frac{r^4}{l^2} - e^{\mu-\lambda}\,r^2$$

Neue Variable $u = r^{-1}$:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = e^{2\mu-\lambda-\nu}\,F^2\,l^{-2} - K\,e^{2\mu-\lambda}\,l^{-2} - e^{\mu-\lambda}\,u^2 \equiv W^2(u)$$

Gleichung der Bahnkurve (elliptisches Integral)

$$\phi = \int \frac{du}{W(u)}$$

Rechnung einfacher in *isotropen Koordinaten*: Im Schwarzschild-Linienelement

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\,dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\,dr^2 - r^2\,d\Omega^2$$

transformiere gemäß

$$r = \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^2\,\bar{r}$$

Resultat (Querstrich wieder weggelassen)

$$ds^2 = \left(\frac{1 - M/2r}{1 + M/2r}\right)^2\,dt^2 - (1 + M/2r)^4\,d\vec{x}^2$$

mit

$$d\vec{x}^2 = dr^2 + r^2\,d\Omega^2$$

In diesen Koordinaten $\lambda = \mu$, $ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\mu \, d\vec{x}^2$.

Für $K = 1$

$$W^2(u) = e^\mu \left(e^{-\nu} \, F^2 - 1\right) \, l^{-2} - u^2$$

Reihenentwicklung der Metrik-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} e^{-\nu} &= \left(\tfrac{1+\frac{1}{2}M\,u}{1-\frac{1}{2}M\,u}\right)^2 = 1 + \alpha_1 \, M \, u + \alpha_2 \, M^2 \, u^2 + \ldots \\ e^\mu &= \left(1 + \tfrac{1}{2}M \, u\right)^4 = 1 + \beta_1 \, M \, u + \beta_2 \, M^2 \, u^2 + \ldots \end{aligned}$$

mit

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 2 \qquad \beta_2 = \frac{3}{2}$$

Einsetzen und beachten, daß in der Newtonschen Näherung für Ellipsenbahnen $E = -M/2a$ gilt. $a=$ große Halbachse. Daher $F^2 = 1 + 2E = 1 - M/a$.

Entwickle $W^2(u)$ zu zweiter Ordnung in M (eine Ordnung über die Newtonsche Näherung hinaus):

$$W^2(u) = A + B \, u - C \, u^2$$

mit

$$
\begin{aligned}
A &= -M/(al^2) \\
B &= M\,[2 - 4M/a]\; l^{-2} \\
C &= 1 - 6\, M^2\, l^{-2}
\end{aligned}
$$

Bahngleichung

$$\phi = \int \frac{du}{\sqrt{A + B\,u - C\,u^2}} = \frac{1}{\sqrt{C}} \;\arcsin\, \frac{B - 2\,C\,u}{\sqrt{B^2 + 4\,A\,C}}$$

$C \neq 1$: Statt Ellipse *Rosettenbahn*. Perihelverschiebung pro Umlauf:

$$\Delta\,\phi = \frac{6\,\pi\,M}{a\,(1 - \epsilon^2)}$$

ϵ numerische Exzentrizität der Kepler-Bahn, gegeben durch den Zusammenhang

$$l^2/M = a\,(1 - \epsilon^2)$$

Vergleich mit dem Experiment (Verschiebung pro Jahrhundert)

Planet	$a/10^6$ km	ϵ	$\Delta\phi_{\text{th}}$	$\Delta\phi_{\text{exp}}$
Merkur	57.91	0.2056	43.03	43.11 ± 0.45
Venus	108.21	0.0068	8.6	8.4 ± 4.8
Erde	149.60	0.0167	3.8	5.0 ± 1.2
Icarus	161.00	0.827	10.3	9.8 ± 0.8

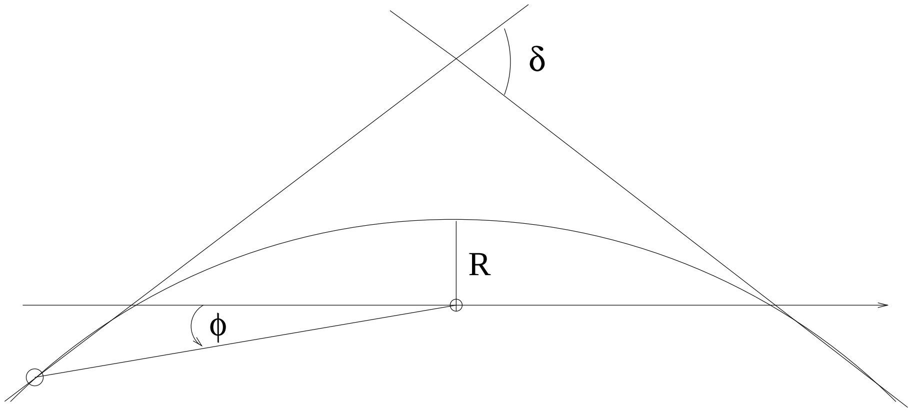
Bemerkung: $C \neq 1$ nur jenseits der linearen Näherung. Periheldrehung daher echter Test der nichtlinearen Struktur der Einsteingleichungen.

Zur Berechnung der *Lichtablenkung* $(K = 0)$ genügt die lineare Näherung:

$$\begin{aligned} A &= F^2 \, l^2 \\ B &= 4 \, M \, F^2 \, l^{-2} \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Bahnkurve für den Lichtstrahl:

$$u = r^{-1} = 2 \, M \, F^2 \, l^{-2} - \left(\frac{F}{l} \right) \sin \phi$$



Mit der Definition $R = l/F$

$$u = \frac{R_S}{R^2} - \frac{1}{R}\,\sin\phi$$

$$\frac{\delta}{2} = \phi|_{u=0}\,, \qquad \sin\phi = \frac{R_S}{R} \approx \phi \quad \to \quad \delta = \frac{4\,M}{R}$$

$\phi = 3\pi/2$:

$$\frac{1}{r} = \frac{R_S}{R^2} + \frac{1}{R} \approx \frac{1}{R}$$

Vorhersage für Licht, das am Sonnenrand vorbeiläuft: $\delta = 1.75$".
Beobachtung: 1.5" $< \delta <$ 2.2".

Ablenkung von Radiowellen des Quasars 3C275, jeweils am 8. Oktober: Radiointerferometrische Messungen: $\delta = 1.76" \pm 0.02"$.

Klassische Rechnung (erstmalig von Soldner 1801, später von Einstein 1908) ergibt für den Ablenkungswinkel die Hälfte des ART-Wertes.

12.3 Hafele-Keating-Experiment

Experiment wurde bereits früher besprochen. Tragen hier nach, daß der Gang einer Uhr, die auf einer Kreisbahn in der Schwarzschildmetrik kreist, gegenüber einer unendlich weit entfernten Uhr durch

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 - \frac{3M}{r}} \approx 1 - \frac{3M}{2r}$$

gegeben ist.

Schwarzschild-Metrik mit $\theta = \pi/2$, $d\theta = 0$, $dr = 0$, d.h. Kreisbahn in der Äquator-Ebene:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - r^2\, d\phi^2$$

Teile durch dt^2 und benutze $\dot{\phi} = l/r^2$ und $l^2 = M\, r$:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - r^2\dot{\phi}^2 = 1 - \frac{3\,M}{r}$$

13 Schwarze Löcher

13.1 Der Schwarzschild-Horizont

SM singulär bei $r = 2\,M \equiv R_S$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\, d\Omega^2$$

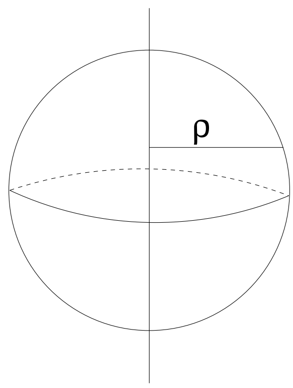
Planeten, Sterne: $R_S \ll R$

$R_{S,\odot} \approx 3$ km, $R_{S,\mathrm{Erde}} \approx 9$ mm

SM ist *Außenraumlösung*, im Innenraum andere Lösung.

Objekte mit $R < R_S$?

Singularität bei $R = R_S$ ist Koordinatensingularität, vergleiche



$$dl^2 = \frac{d\rho^2}{1-\rho^2} + \rho^2\, d\phi^2$$

$\rho = 1 \leftrightarrow$ Äquator

Riemann und seine Kontraktionen sind bei R_S *nicht* singulär.

Frei fallender Beobachter mit Drehimpuls 0:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{M}{r} = E$$

$$\frac{dr}{ds} = \pm\sqrt{2E + R_S/r}$$

Eigenzeit für Fall von $r_1 > R_S$ bis R_S:

$$s_1 = \int_{R_S}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{2E + R_S/r}} < \infty$$

Weiter bis zum Ende:

$$s_2 = \int_0^{R_S} \frac{dr}{\sqrt{2E + R_S/r}} < \infty$$

$dr/ds = 0$ bei $r = r_1 \quad \rightsquigarrow \quad E = -M/r_1$

$$s_1 + s_2 = \pi\, M \, \left(\frac{r_1}{R_S}\right)^{3/2} \approx 10^{-5}\, \frac{M}{M_\odot}\, \left(\frac{r_1}{R_S}\right)^{3/2} \,\text{sec}$$

Es passiert wohl nichts besonderes bei R_S!

Koordinatenzeit t = Zeit eines ruhenden Beobachters bei sehr großem r.

Zusammenhang zwischen t und s

$$\frac{dt}{ds}\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) = F$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{2E + R_S/r}\, F^{-1}\,(1 - R_S/r)$$

Das Integral

$$t_1 = F \int_{R_S}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{2E + R_S/r}\ (1 - R_S/r)}$$

ist unendlich. Ruhender Beobachter sieht das Objekt nie durch die Schwarzschild-Sphäre fallen!

Radiale Lichtstrahlen von r_0 nach $r_1 > r_0$:

$$0 = ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2$$

also

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)$$

Integration:

$$\Delta t = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{1 - R_S/r} = r^*(r_1) - r^*(r_0)$$

mit

$$r^*(r) = r + R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right)$$

Für $r_0 \to R_S$ geht $\Delta t \to \infty$. Der ruhende Beobachter sieht kein Licht durch die Kugelschale $r = R_S$ (Schwarzschild-Horizont) treten.

Rotverschiebung:

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \left(\frac{g_{00}|_1}{g_{00}|_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{1 - R_S/r_0}{1 - R_S/r_1}\right)^{1/2} \approx \sqrt{1 - R_S/r_0} \text{ für } \ r_1 >> R_S$$

Licht des hineinfallenden Objektes ist zunehmend rotverschoben
$\rightsquigarrow$ *Schwarzes Loch*

13.2 Kruskal-Koordinaten

Gesucht: KS, das bei $r = R_S$ nicht singulär wird. Antwort durch Kruskal (1960), Szekeres (1960).

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \Phi(r)\, dt^2 - \Phi(r)^{-1}\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2 \\
&= \Phi(r)\left(dt^2 - dr^{*2}\right) - r^2\, d\Omega^2
\end{aligned}
$$

mit

$$dr^* = \frac{dr}{\Phi(r)}$$

Für SM

$$r^*(r) = r + R_S \,\ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right)$$

Radiale Lichtstrahlen genügen $dt = \pm dr^*$. Suche KT $(r^*, t) \to (u, v)$, so daß diese Eigenschaft erhalten ist, und zusätzlich keine Koordinatensingularitäten auftreten.

Neues Linienelement

$$ds^2 = f^2(u,v)\,\left(dv^2 - du^2\right) - r^2(u,v)\, d\Omega^2$$

Vergleich mit oben:

$$
\begin{aligned}
u &= h\,(r^* + t) + g\,(r^* - t) \\
v &= h\,(r^* + t) - g\,(r^* - t)
\end{aligned}
$$

wobei

$$f^2 = \frac{\Phi}{4\,g'\,h'}$$

Ansatz für h und g:

$$
\begin{aligned}
h\,(r^* + t) &= a\,e^{\gamma(r^*+t)} \\
g\,(r^* - t) &= b\,e^{\gamma(r^*-t)}
\end{aligned}
$$

$$f^2 = \frac{\Phi(r)\,e^{-2\gamma r^*}}{4\,a\,b\,\gamma^2}$$

muß positiv sein. Setze $\gamma = (2\,R_S)^{-1}$:

$$f^2 = (1 - R_S/r)\,e^{-r^*/2R_S}\,\frac{4\,M^2}{a\,b} = \frac{8M^3}{a\,b\,r}\,e^{-r/2R_S}$$

Koordinatentransformation also

$$
\begin{aligned}
u &= \sqrt{r/R_S - 1}\, e^{r/2R_S}\, \cosh(t/2R_S) \\
v &= \sqrt{r/R_S - 1}\, e^{r/2R_S}\, \sinh(t/2R_S)
\end{aligned}
$$

Linienelement in diesen Koordinaten:

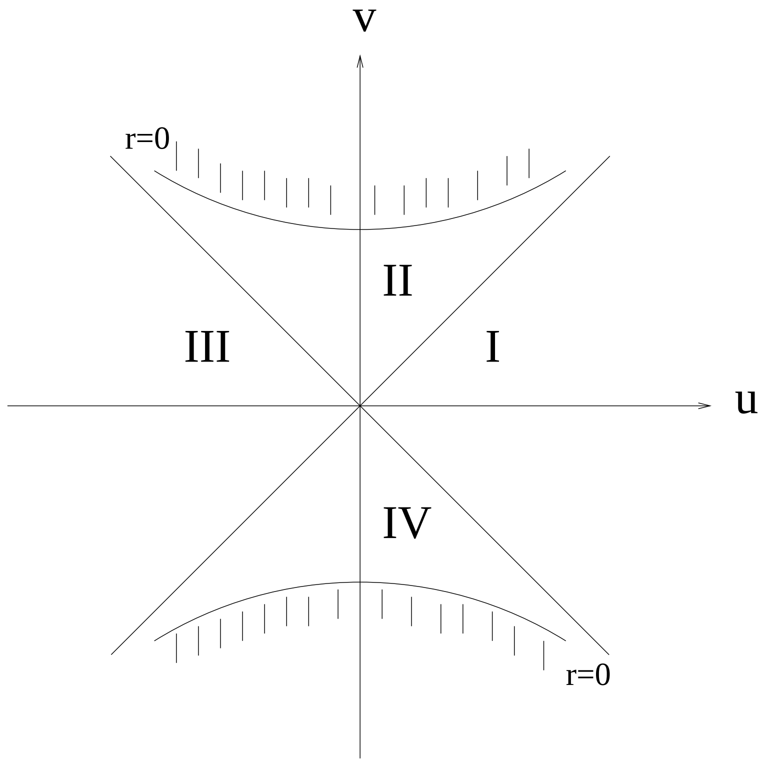
$$ds^2 = \frac{32M^3}{r}\, e^{-r/R_S} \left(dv^2 - du^2\right) - r^2\, d\Omega^2$$

In dieser Gleichung ist r als Funktion von u, v aufzufassen vermöge

$$(r/R_S - 1)\; e^{r/R_S} = u^2 - v^2$$

Trafo zunächst gültig für $r > R_S$, d.h. $|u| > |v|$. Ausdehnung auf größeren Bereich möglich, ohne daß Singularität auftritt. Einschränkung an u, v durch Forderung $r > 0$.

$$r = 0 \quad \leftrightarrow \quad v^2 - u^2 = 1$$



Für die maximale analytische Ausdehnung erforderliche erforderliche Modifikation der Transformationsformeln:

$$u, v = \epsilon_1 \sqrt{|r/R_S - 1|}\; e^{r/2R_S}\; \frac{1}{2} \left(e^{t/2R_S} \pm \epsilon_2\, e^{-t/2R_S} \right)$$

Vorzeichenzuordnung

Gebiet	ϵ_1	ϵ_2	r-Bereich
I	$+1$	$+1$	$r > R_S$
II	$+1$	-1	$r < R_S$
III	-1	$+1$	$r > R_S$
IV	-1	-1	$r < R_S$

Einzige verbliebene Singularität: $r = 0$. Diese ist physikalisch.

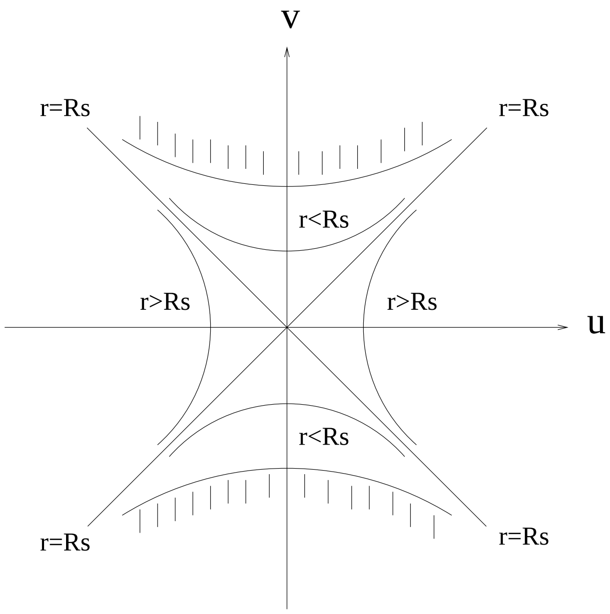
Umkehrformeln:

$$(r/R_S - 1)\ e^{r/R_S} = u^2 - v^2$$

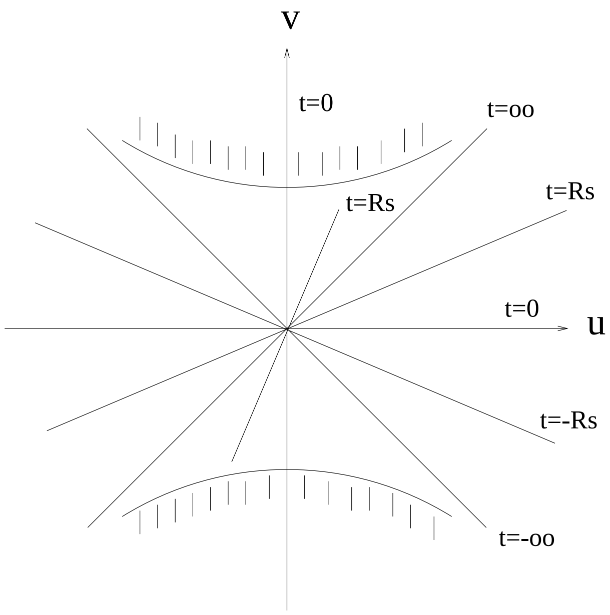
$$t/R_S = \ln\left(\left|\frac{u+v}{u-v}\right|\right)$$

Für jeden Wert von (r, t) gibt es zwei Werte (u, v).

Kurven für konstantes r (Hyperbeln):



Kurven für konstantes t (Geraden):



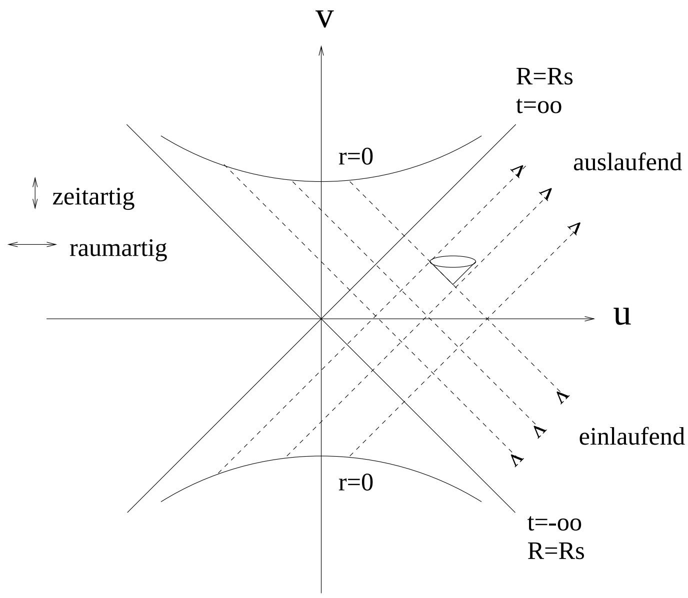
I: Außenraum der SM-Metrik

II: Innenraum der SM-Metrik

III und IV: isometrisch zu I,II: Verdoppelung

<u>Diskussion der Kausalstruktur:</u>

Radiale Lichtstrahlen, $ds^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \left|\frac{dv}{du}\right| = 1$



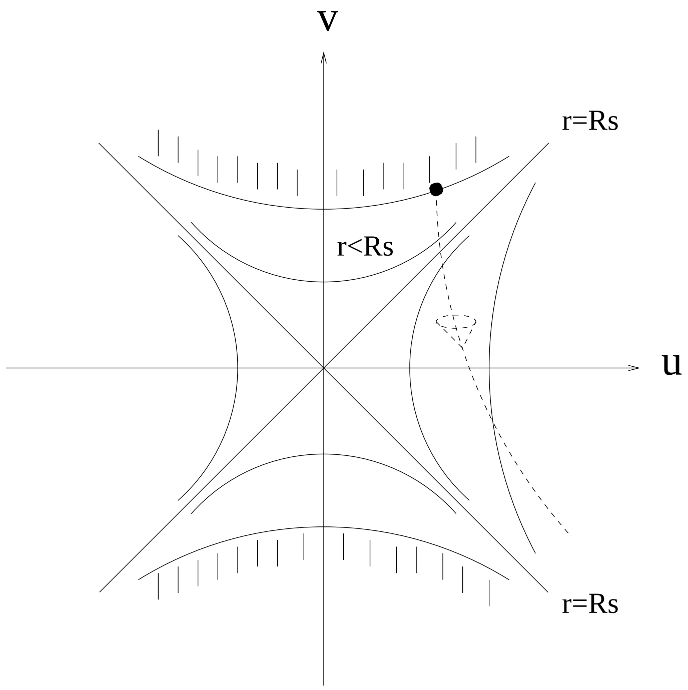
Für $r < R_S$ ist t eine raumartige und r eine zeitartige Koordinate.

- Kein Signal zwischen I und III
- Kein Signal von I nach IV
- Kein Signal von II nach I

Interpretation

- II: schwarzes Loch, alles kann rein, nichts raus
- IV: weißes Loch, nichts kann rein, alles kann raus

Massive Körper stürzen auf zeitartigen Geodäten in den Ursprung:



13.3 Gravitationskollaps

- Sind die Gebiete III und IV im Kosmos realisiert?
- Wie bilden sich Schwarze Löcher?

Zwei Möglichkeiten:

- Kollaps z.B. eines Sterns nach Erlöschen des Kernbrennens: SM nur für $r > R$ gültig. Weltlinie eines Punktes an der Oberfläche bei $r = R$ ist *zeitartig*: Sobald $R < R_S$, muß der Stern zu einem Punkt zusammenfallen. Regionen III, IV sind unphysikalisch.

- Primordiale Schwarze Löcher, von vornherein vorhanden, können Regionen III und IV haben. Astronauten aus I,III können sich treffen, bevor sie die Singularität erreichen.

Kollaps-Szenarios:

- Weißer Zwerg: entartetes Elektronen-Gas, $M < 1.2 M_\odot$ Chandrasekhar-Grenze (Stabilität), $R \geq 4000$ km

- Neutronen-Stern: Rest einer Supernova, $M < 0.7 M_\odot$, $R >$ 9.6 km Oppenheimer-Volkoff-Grenze

- Schwarzes Loch, absolute Stabilitätsgrenze $R/R_S > 9/8$

Bemerkungen

- Allgemeinste stationäre Lösung für kollabierte Massen vermutlich Kerr-Newman-Lösung der EG mit nur 3 Parametern: Masse M, Drehimpuls L, elektrische Ladung Q. *"Ein schwarzes Loch hat keine Haare"*.

- Singularität hinter dem Schwarzschild-Horizont: *"Kosmische Zensur"*. Es gibt aber auch Lösungen mit nackten Singularitäten (große L und Q).

- M, L, Q können von außen verändert werden. Die Oberfläche des Schwarzen Loches muß dabei gemäß

$$A = 4\pi \left(2M^2 - Q^2 + 2\sqrt{M^4 - M^2 Q^2 - L^2} \right)$$

  zunehmen.

- *Hawking-Strahlung*: Quanteneffekt, der (für $L = Q = 0$) zu einer Schwarzkörper-Strahlung mit

$$kT = \frac{\hbar c}{8\pi M}, \qquad T \approx 6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{K}\,\frac{M_\odot}{M}$$

  führt. Das Schwarze Loch "verdampft". Lebensdauer

$$t \approx 10^{71}\,\mathrm{sec} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^3$$

  Mini-Schwarze-Löcher: $M \approx 10^{12}$ kg, $t \approx 10^{10}$ a, $R_S \approx 10^{-13}$ cm, $T \approx 2 \cdot 10^{11} K$.

- Astrophysikalischer Kandidat ist z.B. SgrA$*$ im Zentrum der Milchstraße. Siehe Physikalische Blätter, Januar 1998.

14 Kosmologie

14.1 Robertson-Walker-Metrik

Zur Geschichte:

- A. Einstein, 1917
  "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie". Statisches, *endliches Universum* $\leftrightarrow$ Kosmologische Konstante Λ: $G_{ik} = -\kappa\, T_{ik} - \Lambda\, g_{ik}$
- E. Hubble, 1929
  Rotverschiebung $\leadsto$ Expansion des Weltalls
- A. Friedmann, 1922
  Kosmologische Modelle mit Expansion

Kosmologisches Prinzip:

- räumliche Homogenität
- räumliche Isotropie

$\leadsto$ Es gibt eine universelle Zeit t

$$ds^2 = dt^2 - g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

Materie ruht bezüglich dieser "mitbewegten Koordinaten".

Gesucht: 3-dimensionaler Raum konstanter Krümmung

Modell:

1) positive Krümmung: 3-dimensionale Hyperkugel im $\mathbf{R}^4$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \xi^2 = a^2$$

Eliminiere ξ vermöge

$$\xi = \left(a^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2\right)^{1/2}$$

Polarkoordinaten für (x^1, x^2, x^3): $x^1 = r\,\sin\theta\,\cos\phi$ etc.

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^1)^2 + (dx^1)^2 + (d\xi)^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2\,d\Omega^2$$

$0 \leq r < a$, Krümmung: $R = 1/a^2$.
Singularität bei $r = a$: Koordinatensingularität

2) negative Krümmung: Hyperboloid

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - \xi^2 = -a^2, \qquad \xi > 0$$

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{a^2}} + r^2\, d\Omega^2$$

$0 \leq r < \infty$, Krümmung: $R = -1/a^2$.

<u>Robertson-Walker-Metrik:</u>

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{1 - k\, r^2/a^2(t)} - r^2\, d\Omega^2$$

Robertson, Walker (1936): Obige Metrik ist die allgemeinste Metrik, die dem kosmologischen Prinzip genügt.

$a(t)$ = Weltradius

<u>$k = 1$</u> *geschlossener Raum*, positive Krümmung

$$V = 2 \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{r^2\, \sin\theta}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = 2\,\pi^2\, a^3$$

Umfang eines Kreises: $dr = d\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $dl = r\, d\phi$

$$U(r) = 2\,\pi\, r$$

Abstand vom Nullpunkt:

$$d(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - r'^2/a^2}} = a\ \arcsin\frac{r}{a}\ \geq\ \frac{U}{2\pi}$$

Krümmung (vergl. Kapitel 1): $r(d) = a\ \sin(d/a)$,

$$R = \frac{3}{\pi} \lim_{d\to 0} \left(\frac{2\pi\, d - 2\pi r(d)}{d^3} \right) = \frac{1}{a^2}$$

<u>$k = -1$:</u> *offener Raum*, negative Krümmung

$$\begin{aligned} V &= \infty \\ U(r) &= 2\,\pi\, r \\ d(r) &= a\,\mathrm{Arsinh}\,\tfrac{r}{a} < \tfrac{U}{2\pi} \end{aligned}$$

<u>$k = 0$:</u> *flacher Raum*

<u>Einstein-Tensor</u>:

$$\begin{aligned} G^0{}_0 &= -3\,\tfrac{\dot{a}^2+k}{a^2} \\ G^1{}_1 &= G^2{}_2 = G^3{}_3 = -2\,\tfrac{\ddot{a}}{a} - \tfrac{\dot{a}^2+k}{a^2} \end{aligned}$$

$\dot{()} = d/dt\,()$. Die nicht aufgeführten Komponenten verschwinden.

<u>Einsteingleichungen:</u>

$$G_{ik} = -\kappa\, T_{ik}$$

Modell für die Materie: ideale Flüssigkeit (keine Reibung).

Energie-Impulstensor im Ruhsystem der Flüssigkeit:

$$T_{ik} = \mathrm{diag}(\rho, p, p, p)$$

ρ, p sind Dichte und Druck. In einem beliebigen KS:

$$T_{ik} = (\rho + p)\, u_i\, u_k - p\, g_{ik}$$

Resultierende Bewegungsgleichung für den Radius:

$$\begin{aligned} 2\,\tfrac{\ddot{a}}{a} + \tfrac{\dot{a}^2+k}{a^2} &= -\kappa\, p \qquad\qquad (A) \\ 3\,\tfrac{\dot{a}^2+k}{a^2} &= \kappa\, \rho \qquad\qquad (B) \end{aligned}$$

Bilde $d/dt\,[(B)a^3] - \;3\,a^2\,\dot{a}\,(A)$:

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p\,\frac{d}{dt}a^3 = 0 \qquad\qquad (A')$$

$(A'), (B)$ und die Zustandsgleichung zwischen ρ und p bestimmen $a = a(t)$.

14.2 Friedmann-Kosmos

Inkohärente Materie (Staub): $p = 0$

$(A') \quad \rightsquigarrow \quad \rho\, a^3(t) \equiv M = \text{const}$

in geschlossenen Universen: $M \sim$ Gesamtmasse

$(B) \quad \frac{\dot a^2 + k}{a^2} = \frac{\kappa M}{3a^3} \quad \rightsquigarrow \quad \dot a^2 - \frac{\kappa M}{3a} + k = 0$

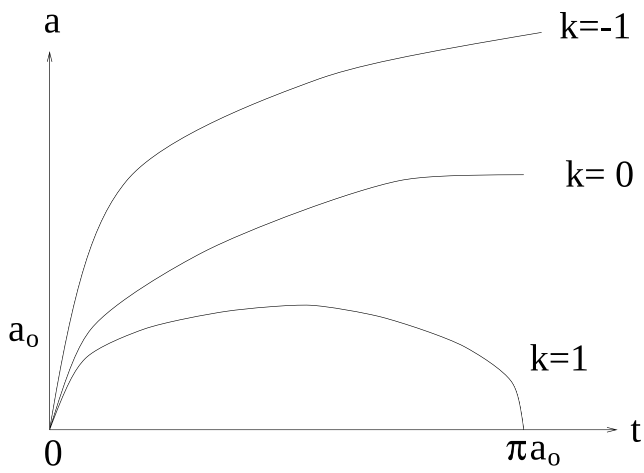
Friedmann-Gleichung

=

Bewegungsgleichung für Fall im Potential $1/a$, mit Energie $-k$.

Lösungen ($a_0 = \kappa M/3$):

$$
\begin{aligned}
k = \ \ 1 \ &: \ t = \ \ \tfrac{a_0}{2} \arccos\left(1 - \tfrac{2a}{a_0}\right) - \sqrt{a_0\, a - a^2} \\
k = -1 \ &: \ t = -\tfrac{a_0}{2} \mathrm{Arcosh}\left(1 + \tfrac{2a}{a_0}\right) + \sqrt{a_0\, a - a^2} \\
k = \ \ 0 \ &: \ t = \ \ \tfrac{2}{3}\, a_0 \left(\tfrac{a}{a_0}\right)^{3/2}
\end{aligned}
$$



- Bewegungsablauf durch die Krümmung bestimmt
- Singularität bei $t = 0$. Allerdings: Für frühe Zeiten gilt die Annahme koährenter Materie *nicht*. Man kann aber zeigen, daß Lösungen der EG eine Singularität zu frühen Zeiten haben müssen, wenn das Universum sich jetzt ausdehnt (Hawking, Penrose).

Strahlungsdominiertes Universum: $p = \frac{1}{3}\rho$.

$$\rho a^4 \equiv A = \mathrm{const}$$

$$\dot{a}^2 - \frac{\kappa\, A}{3\, a^2} + k = 0$$

$$a^2 = \left(\frac{\kappa\, A}{3}\right)^{1/2} t - k\, t^2$$

"Heutige" Verhältnisse: $\rho_{\mathrm{Strahlung}} << \rho_{\mathrm{Materie}}$.

Annahme: Friedmann Kosmos mit $p = 0$ gute Beschreibung.

14.3 Beobachtende Kosmologie

Lichtausbreitung:

<u>Quelle</u>		<u>Beobachter</u>
$r = r_1$		$r = 0$
t_1	$\bullet \rightsquigarrow$	$\bullet\ t_0$
$t_1 + \Delta t_1$	$\bullet \rightsquigarrow$	$\bullet\ t_0 + \Delta t_0$

$$ds = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad dt = -a(t)\,\tfrac{dr'}{\sqrt{1-kr'^2}}\,, \qquad r' = r/a$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1/a} \frac{dr'}{\sqrt{1-kr'^2}} = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t_1}{a(t_1)}$$

Anwendung auf Frequenzverschiebung:

$\nu = \frac{2\pi}{\Delta t}$: $\nu_0 \, a(t_0) = \nu_1 \, a(t_1)$

In der Expansionsphase ergibt sich eine *Rotverschiebung*:

$$z \equiv \frac{\nu_1 - \nu_0}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 > 0$$

Taylor-Entwicklung:

$$a(t_1) = a(t_0) \left(1 + H \, (t_1 - t_0) - \frac{q}{2} \, H^2 \, (t_1 - t_0)^2 + \ldots\right)$$

mit

$$H = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \quad \text{Hubble-Zahl}$$

und

$$q = -\frac{\ddot{a}(t_0) \, a(t_0)}{\dot{a}(t_0)^2} \quad \text{Verzögerungsparameter}$$

$$z = H \, (t_0 - t_1) + \left(1 + \frac{q}{2}\right) H^2 \, (t_0 - t_1)^2 + \ldots$$

Lichtlaufzeit $t_0 - t_1$ $\quad \rightsquigarrow \quad$ aktuelle Entfernung $d(t_0)$

$$d = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - k\,\frac{r^2}{a(t_0)^2}}} = a(t_0) \int_{r'_0}^{r'_1} \frac{dr'}{\sqrt{1 - k\,r'^2}}$$

Wegen

$$dt = -a(t)\,\frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}$$

gilt

$$\begin{aligned} d(t_0) &= a(t_0) \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \\ &= a(t_0) \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t_0)(1+H(t-t_0)+\ldots)} \\ &= \int_{t_1}^{t_0} dt\,(1 - H(t-t_0) + \ldots) \\ &= (t_0 - t_1) + \frac{H}{2}\,(t_0 - t_1)^2 + \ldots \end{aligned}$$

Resultat zu zweiter Ordnung:

$$z = H\,d + \frac{1}{2}(q+1)H^2\,d^2 + \ldots$$

Hubblesches Gesetz (1929):

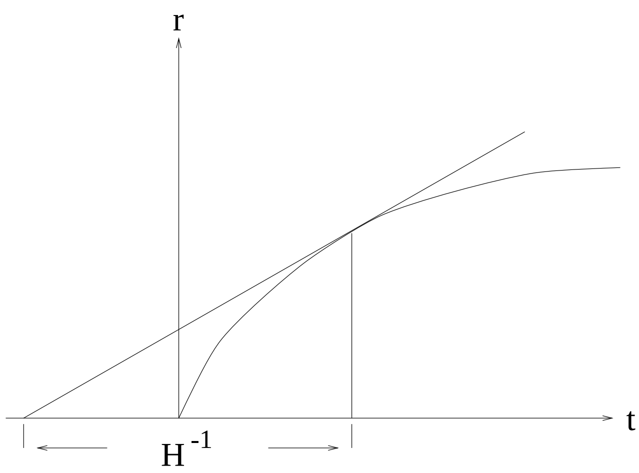
$$z \approx H\,d \quad \text{mit} \quad H > 0$$

Die (genaue) experimentelle Bestimmung von H ist schwierig:

$$
\begin{aligned}
H &= (1.8 \pm 0.2)\,10^{-18}\,\mathrm{sec}^{-1} \quad \text{Sandage} \\
&= (3.2 \pm 0.3)\,10^{-18}\,\mathrm{sec}^{-1} \quad \text{de Vaucoulers et al.}
\end{aligned}
$$

$q > 0$ nicht gut bekannt, $q = 1 \pm 0.4$

Zur Bedeutung von H:



$H^{-1} \approx 1.8 \cdot 10^9\,\mathrm{a} > t_0$

Zur Bedeutung von q: Setze Def. von H, q in (A), (B) ein für $t = t_0$:

$$\begin{aligned} 6\,q\,H^2 &= \kappa\,\rho \\ H^2\,(2\,q-1) &= \tfrac{k}{a(t_0)^2} \end{aligned}$$

2. Gleichung erfordert

$$\begin{aligned} k &= 1\,, \qquad \text{falls} \quad q > \tfrac{1}{2} \\ k &= 0\,, \qquad \text{falls} \quad q = \tfrac{1}{2} \\ k &= -1\,, \qquad \text{falls} \quad q < \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

1. Gleichung:

$$q > \frac{1}{2} \quad \text{falls} \quad \rho > \rho_c = \frac{3\,H^2}{\kappa} \approx 5 \cdot 10^{-27}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

geschätzte Dichten:
Galaxien: $\rho \approx 3 \cdot 10^{-28}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
Strahlung: $\rho \approx 4.5 \cdot 10^{-31}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

$\leadsto$ fehlende Materie?
$\leadsto$ Universum offen oder geschlossen?

Für $q = 1$ und $H^{-1} = 18 \cdot 10^9$ a ist $t_0 = 11 \cdot 10^9$ a.

14.4 Frühes Universum

$a << a_0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Strahlung dominiert.

$\rho \sim T^4$ (Stefan-Boltzmann) $\quad \sim \quad T \sim \frac{1}{a}$

Kosmische Hintergrundstrahlung: $T = 2.7^o$ K

Epochen:

t	a[m]	$T[^o\mathrm{K}]$	$\rho[\mathrm{kg/m^3}]$	Beschreibung
10^{10}a	10^{26}	2.7	10^{-27}	Materie dominiert
$4 \cdot 10^5$a	10^{23}	3000	10^{-18}	Entkoppelung der Strahlung Strahlung dominiert
$2 \cdot 10^3$sec	10^{18}	$3 \cdot 10^8$	10	Kernreaktionen Bildung leichter Elemente
2sec	$3 \cdot 10^{16}$	10^{10}	10^{11}	Leptonenpaare in der thermischen Strahlung
10^{-4}sec	$3 \cdot 10^{14}$	10^{12}	10^{19}	Baryonen und Antibaryonen in der thermischen Strahlung