Übungsaufgaben zu Physik IV (SS 98)

Blatt 6

Aufgabe 6.1 (L:20): Kristallstrukturen

Berechnen Sie den maximalen Anteil des Volumens, der sich bei folgenden Kristallstrukturen mit harten Kugeln vom Radius R ausfüllen läßt:

a) kubisch primitiv *(sc)*

b) kubisch raumzentriert *(bcc)*

c) kubisch flächenzentriert *(fcc)*

d) hexagonal dichteste Packung *(hcp)*.

Aufgabe 6.2 (L:15;D:15): Reziprokes Gitter

Durch die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ werde ein hexagonales Gitter aufgespannt, wobei $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq |\vec{c}|$ und $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}; \gamma = \frac{2\pi}{3}$ sei.

a) Bestimmen Sie das Volumen der Elementarzelle.

b) Berechnen und zeichnen Sie die Vektoren $\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*$ und bestimmen Sie das Volumen der Einheitszelle des reziproken Gitters V^*.

c) Wie groß ist der Winkel zwischen $\vec{a}^*$ und $\vec{b}^*$?

Aufgabe 6.3 (L:0): Punktgitter

Zeigen Sie, dass ein Punktgitter keine S- und keine J- oder mehrzählige Drehsymmetrie aufweisen kann. Betrachten Sie dazu den kürzest möglichen Translationsvektor $\vec{a}_1$. Aus der n-zähligen Drehsymmetrie folgt die Existenz von $n-1$ weiteren (kürzesten) Translationsvektoren $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n$. Durch geeignete Addition zweier solcher Vektoren läßt sich ein weiterer Vektor bilden, welcher wieder im Gitter liegen muss.

Aufgabe 6.4 (L:0;D:0): Unschärferelation

Begründen Sie mit Hilfe der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation $\Delta r \cdot \Delta p_r \geq \frac{\hbar}{2}$, dass es einen tiefsten Zustand im H-Atom gibt. *Hinweis:* Nehmen Sie an, dass Δr und Δp_r durch r respektive p_r gegeben sind.
Gibt es etwas Entsprechendes beim harmonischen Oszillator? Was folgt hieraus für die Nullpunktschwankungen des Oszillators? *Hinweis:* Argumentieren Sie in diesem Fall etwas genauer und benutzen Sie für das Schwankungsquadrat der Variablen $\xi \in \{x, p\}$: $(\Delta\xi)^2 = \langle(\xi - \langle\xi\rangle)^2\rangle$, wobei „$\langle \ldots \rangle$“ die klassischen zeitlichen Mittelwerte der oszillatorischen Bewegung über eine Periode sind.

Aufgabe 6.5 (D:0): Ein Teilchen im unendlich hohen Potentialtopf

Betrachten Sie ein Teilchen im unendlich hohen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

das sich im stationären Zustand ψ_n befindet.

a) Berechnen Sie $\langle x \rangle$ und Δx.

b) Zeigen Sie, dass das Ergebnis für Δx mit dem klassischen Resultat im Falle großer n übereinstimmt.

d) Berechnen Sie $\Delta x \cdot \Delta p$.

Aufgabe 6.6 (D:18): Kernpotential zwischen Proton und Neutron

Das Kernpotential zwischen Proton und Neutron kann durch

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ -V_0, & 0 < x < R_0 \\ 0, & R_0 < x \end{cases}$$

mit $R_0 = 2 \cdot 10^{-15}$ m approximiert werden.

a) Leiten Sie die Lösbarkeitsbedingung für gebundene Zustände her:

$$\cot(kR_0) = -\frac{\kappa}{k}, \qquad \text{mit} \qquad k^2 = \tfrac{2m}{\hbar^2}(E + V_0), \qquad \kappa^2 = \tfrac{2m}{\hbar^2} E.$$

b) Zeigen Sie, dass außerdem gelten muss

$$V_0 > \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mR_0^2},$$

wenn ein gebundener Zustand existiert.

c) Das Deuteron ist der einzige gebundene Zustand und hat eine Bindungsenergie $-E = 2,23\,\mathrm{MeV}$. Schätzen Sie V_0 ab.