Übungsaufgaben zu Physik IV (SS 98)

Blatt 10

Aufgabe 10.1 (D:0): Operatoren im endlichdimensionalen Hilbertraum

In einem dreidimensionalen komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ seien zwei lineare Operatoren A und B durch ihre Wirkung auf die Vektoren einer orthonormierten Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} Ae_1 &= 3e_1 - \hat{\imath}\sqrt{2}e_2 + e_3 & \qquad Be_1 &= e_1 + \hat{\imath}\sqrt{2}e_2 + e_3 \\ Ae_2 &= \hat{\imath}\sqrt{2}e_2 + 2e_2 - \hat{\imath}\sqrt{2}e_3 & \qquad Be_2 &= -\hat{\imath}\sqrt{2}e_1 + \hat{\imath}\sqrt{2}e_3 \\ Ae_3 &= e_1 + \hat{\imath}\sqrt{2}e_2 + 3e_e & \qquad Be_3 &= e_1 - \hat{\imath}\sqrt{2}e_2 + e_3 \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Matrizen $\hat{A}^{(e)}$ und $\hat{B}^{(e)}$, welche den Operatoren A und B in der obigen Basis zugeordnet sind.

b) Zeigen Sie, dass die Operatoren A und B kommutieren, das heißt, dass $[A, B] := AB - BA = 0$.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und B.

d) Wie lautet in diesem Raum der Projektionsoperator, welcher auf den 1-dimensionalen Unterraum mit dem Vektor $(e_1 + e_2)$ projiziert?

Aufgabe 10.2 (D:8): Operator-Adjungierte

Finden Sie die adjungierten Operatoren zu

a) $A_1 = x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

b) $A_2\psi(x) = \alpha\psi(x), \alpha \in \mathbb{C}$

c) $A_3\psi(x) = \psi(x + a), a \in \mathbb{R}$

d) $A_4\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x - y)\psi(y)\mathrm{d}y$

Aufgabe 10.3 (D:8): Klassisches Analogon zum Gamow-Faktor

Zeigen Sie, dass der Gamow-Faktor in der Form

$$T(E) = \exp(-\tfrac{2}{\hbar}S_E)$$

geschrieben werden kann, wobei S_E die klassische Wirkung für die Bewegung eines Teilchens der Energie 0 im Potential $U(x) := E - V(x)$ zwischen den Umkehrpunkten ist.

Aufgabe 10.4 (L:5;D:5): ^{14}C-Methode

Bei archäologischen Ausgrabungen wird ein Stück Holzkohle gefunden. Bei 1 g Probenmaterial werden 5,2 Zerfälle pro Minute gemessen. Aus der bekannten Halbwertszeit für ^{14}C ($T_{\frac{1}{2}} = 5736\,\mathrm{a}$) und der Zerfallsrate für 1 g „frischen" Kohlenstoff von $\dot{n}_{\text{Zerfälle}} = 12{,}4\,\mathrm{min}^{-1}$ bestimme man das Alter der Holzkohle.

Aufgabe 10.5 (L:0;D:0): Schalenmodell des Kerns

Die Energieniveaus eines Teilchens in einem dreidimensionalen harmonischen Oszillatorpotential sind durch

$$E = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + \tfrac{3}{2})$$

gegeben, wobei $n_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ die Quantenzahlen für die drei Raumrichtungen sind und ω die klassische Frequenz ist. Benutzt man dies als Näherung für ein Kernpotential, so ist beim „Auffüllen" mit Protonen und Neutronen die Spin-Quantenzahl und das Pauli-Prinzip zu berücksichtigen.

a) Wieviele Protonen/Neutronen kann man im Energiezustand $E_n = (n + \tfrac{3}{2})\hbar\omega$ für $n = 0, 1, 2, 3$ unterbringen, wobei $n = n_x + n_y + n_z$ gilt? *Hinweis:* Betrachten Sie alle möglichen Kombinationen von Quantenzahlen n_x, n_y, n_z, die zu einem vorgegebenen n führen.

b) Für welche Protonen-/Neutronenzahl wird eine Schale abgeschlossen? Vergleichen Sie diese Werte mit den „magischen Zahlen".

Aufgabe 10.6 (L:0): Weizsäcker-Formel

Zeigen Sie unter Benutzung der semi-empirischen Weizsäcker-Formel, dass die für die Abtrennung eines Neutrons von einem Kern (A, Z) erforderliche Energie ungefähr

$$Q \approx -b_{\mathrm{v}} + \tfrac{2}{3} b_{\mathrm{o}} A^{-\frac{1}{3}} + b_{\mathrm{a}} \left(\tfrac{1}{4} - \frac{Z^2}{A(A-1)} \right)$$

ist. Schätzen Sie ab, welches Isotop instabil gegen Neutronenemission wird. Benutzen Sie $\mathrm{b_v} = 15,85\,\mathrm{MeV}$, $\mathrm{b_c} = 0,71\,\mathrm{MeV}$, $\mathrm{b_o} = 18,34\,\mathrm{MeV}$, $\mathrm{b_a} = 92,86\,\mathrm{MeV}$ und $\mathrm{b_p} = 11,46\,\mathrm{MeV}$.

Aufgabe 10.7 (L:6): Coulomb-Wall von Kernen

Wie hoch ist der „Coulonb-Wall" (in MeV) bei der Annäherung eines α-Teilchens an ein $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$-Kern?