Übungsaufgaben zu Physik IV (SS 97)

Blatt 9

Aufgabe 9.1 (L:0): Natürliche Radioaktivität

Einen bedeutenden Anteil an der natürlichen inneren Strahlenbelastung des Menschen liefert das Nuklid ^{40}K ($t_{\frac{1}{2}} = 1,2 \cdot 10^9\, a$). ^{40}K ist zu $0,0119\%$ im Isotopengemisch des Kaliums vorhanden. Die Gesamtkonzentration an Kalium im Körper beträgt $2g/kg$. Wie groß ist die ^{40}K-Aktivität eines Menschen ($m = 70\, kg$)?

Aufgabe 9.2 (L:15;D:0): Zerfallsgesetz

Eine radioaktive Muttersubstanz zerfällt mit der Zerfallskonstanten λ_1 in eine Tochtersubstanz, die ihrerseits mit der Zerfallskonstanten λ_2 zerfällt. Berechnen Sie $N_2(t)$, wenn die Zahl der Tochterkerne zum Zeitpunkt $t = 0$ $N_2(0) \neq 0$ beträgt. *Hinweis:* Stellen Sie die Ratengleichung für $\frac{dN_2(t)}{dt}$ auf, manipulieren Sie die Gleichung so, dass Sie die Beziehung

$$\frac{dN_2(t)}{dt} \exp(\lambda_2\, t) + \lambda_2\, N_2(t)\, \exp(\lambda_2\, t) = \frac{d(N_2(t) \exp(\lambda_2 t))}{dt}$$

ausnutzen können, und integrieren Sie die entstehende Gleichung. Die Integrationskonstante erhalten Sie aus den Anfangsbedingungen bei $t = 0$: $N_1(0)$ und $N_2(0)$. Skizzieren Sie die Verhältnisse für $\lambda_1 < \lambda_2$ mit $N_2(0) = 0$.

Aufgabe 9.3 (L:6): C-14-Methode

Zur Bestimmung der Sedimentationsgeschwindigkeit wird eine Datierung mit Hilfe der C-14-Methode vorgenommen (Halbwertszeit von ^{14}C: $t_{\frac{1}{2}} = 5730\, a$). Eine aus $1,5\, m$ Tiefe der Sedimentschicht stammende organische Probe von $1\, g$ weist eine ^{14}C-Aktivität von $56,6\, mBq$ auf. Die ^{14}C-Aktivität von rezentem (d.h. aus heutiger Zeit stammendem) organischem Material beträgt $226\, mBq/g$. Wie groß ist die Sedimentationsgeschwindigkeit?

Aufgabe 9.4 (L:0;D:5): Kernzerfälle

Welche Nuklide entstehen bei der Bestrahlung von Kochsalz im Kernreaktor, wenn (n, γ)-, (n, p)- und (n, α)-Prozesse auftreten? Beachten Sie, dass verschiedene Isotope beteiligt sein können.

Aufgabe 9.5 (D:15): Normierung der Oszillator-Eigenfunktionen

Berechnen Sie für die in der Vorlesung hergeleiteten Oszillator-Eigenfunktionen

$$u_n(x) = N_n\, H_n(\xi) \exp(-\tfrac{1}{2}\xi^2) \qquad \text{mit } \xi = \tfrac{x}{b}$$

den Wert des Orthonormierungsintegrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_m^*(x) u_n(x)\, dx$$

und daraus für $m = n$ den zur Normierung notwendigen Wert der Konstanten N_n. Diskutieren Sie die „Eichfreiheit“ bei der Wahl von N_n.
Hinweis: Betrachten Sie das Produkt $\exp(-\xi^2) S(\xi, z) S(\xi, w)$ mit der erzeugenden Funktion $S(\xi, z) = \exp(2z\xi - z^2)$ und seine Entwicklung nach Potenzen von z und w. Integrieren Sie dann beiderseits über ξ.

Aufgabe 9.6 (D:0): Skalarprodukte mit Oszillator-Eigenfunktionen

Berechnen Sie in Verallgemeinerung von Aufgabe 9.5 das Produkt $\exp(2\lambda\xi - \xi^2)S(\xi, z)S(\xi, w)$ und seine Entwicklung nach Potenzen von z, w und λ. Integrieren Sie beide Seiten über ξ und berechnen Sie daraus die Größen

$$(x^k)_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} u_m^*(x) x^k u_n(x)\, dx \qquad \text{für } k \in \{1, 2\},$$

die sogenannten „Matrixelemente des Operators x^k in der Basis der Oszillator-Eigenfunktionen“. Geben Sie insbesondere den Erwartungswert der potentiellen Energie in dem n-ten Oszillator-Eigenzustand an. Wie groß ist dann der Erwartungswert der kinetischen Energie?

Aufgabe 9.7 (D:15): Stationäre Zustände im Potentialkasten

Ein Teilchen bewege sich in einer Dimension in einem „Potentialkasten mit unendlich hohen Wänden“, $V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < a \\ \infty & |x| \geq a\,. \end{cases}$

a) Begründen Sie, dass stationäre Lösungen mit endlicher Energie E die Randbedingungen $u(\pm a) = 0$ erfüllen müssen. *Hinweis:* Der Erwartungswert der potentiellen Energie muss endlich sein.

b) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung $H\psi(x) = E\psi(x)$ im Innengebiet mit diesen Randbedingungen. Geben Sie die möglichen Energieeigenwerte E an und skizzieren Sie die drei energetisch tiefsten Eigenfunktionen.