Übungsaufgaben zu Physik IV (SS 97)

Blatt 7

Aufgabe 7.1 (L:8;D:0): Isotopie

Aus wievielen Protonen und Neutronen sind die Atomkerne der drei isotopen Nuklide ^{20}Ne, ^{21}Ne und ^{22}Ne aufgebaut? Die isotopen Nuklide mit dem Massen m_1, m_2 und m_3 werden jeweils einfach ionisiert und mit gleichen kinetischen Energien senkrecht zur Flußdichte in ein homogenes Magnetfeld geschossen. Wie verhalten sich die Bahnradien der Ionen zueinander?

Aufgabe 7.2 (L:0;D:0): Neutronensterne

Berechnen Sie die Dichte der Kernmaterie. Welche Masse würde ein Stecknadelknopf ($\approx$ 1 mm^3) besitzen, wenn er aus Kernmaterie bestünde? Sterne, die ihre thermonuklearen Energiequellen erschöpft haben, können durch den Gravitationsdruck zu Neutronensternen zusammenfallen: Die Elektronen werden in die Protonen „gequetscht“. Berechnen sie den Radius eines Neutronensterns von $3 \cdot 10^{30}$ kg ($\approx 1,5$ Sonnenmassen).

Aufgabe 7.3 (L:0): Höhe des Coulomb-Walls

Berechnen Sie die Höhe des Coulomb-Walls (in MeV) bei der Annäherung eines α-Teilchens an einen ^{238}U-Kern.

Aufgabe 7.4 (L:8;D:8): Moderation von Neutronen

Neutronen wechselwirken nur mit Atomkernen, nicht aber mit der Elektronenhülle. Warum werden Neutronen in Wasser mehr gebremst als in Blei? Warum ist dies bei den meisten anderen Strahlungen umgekehrt? Wieviele Stöße braucht ein 1 MeV-Neutron, um auf thermische Energie kT bei $T \approx 290K$ abgebremst zu werden, wenn ein Neutron bei einem Stoß (mit einem Proton) im Mittel den Bruchteil $1/e$ an Energie verliert?

Aufgabe 7.5 (D:18): Kommutatoren

Die „Multiplikation“, d.h. Nacheinanderschaltung zweier quantenmechanischer Operatoren zu Messgrößen A, B ist im Allgemeinen nicht kommutativ, d.h. die Reihenfolge der Anwendung auf eine Wellenfunktion ist nicht gleichgültig. Ein Maß für diese „Nichtvertauschbarkeit“ ist der *Kommutator*

$$[A, B] := AB - BA.$$

(Der Sachverhalt ist analog zur Nichtkommutativität der Matrixmultiplikation in der linearen Algebra.)

a) Der *fundamentale* oder *kanonische Kommutator* ist der Kommutator $[X_k, P_l]$ für die Operatoren der Orts- und Impulskomponenten. Berechnen Sie diesen Kommutator sowohl in der Orts- als auch in der Impulsdarstellung.
Hinweis: Es ist zweckmäßig, zuerst $[X_k, P_l]\psi(\vec{x}, t)$ (Ortsdarstellung) bzw. $[X_k, P_l]\varphi(\vec{p}, t)$ (Impulsdarstellung) für beliebige Wellenfunktionen zu berechnen. Durch Schreiben des Endresultates als Operatorwirkung $A\psi(\vec{x}, t)$ bzw. $A'\varphi(\vec{p}, t)$ und Weglassen der beliebigen Wellenfunktion ergibt sich die gewünschte Operatorrelation.

b) Beweisen Sie die Operatoridentität

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C].$$

c) Berechnen Sie aus dem in a) errechneten fundamentalen Kommutator mit dem Resultat von b) die folgenden Kommutatoren:

$$[\vec{P}^2, X_k] \qquad\qquad [L_k, P_l] \qquad\qquad [L_k, L_m],$$

wobei $L_k = \varepsilon_{ijk} X_i P_j$ (Summenkonvention!) der Operator des Bahndrehimpulses ist.

Aufgabe 7.6 (D:0): Skalarprodukt und Hermitizität im endlichdimensionalen Vektorraum

Man betrachte den N-Dimensionalen Raum $\mathbb{C}^N$ der komplexwertigen Spaltenvektoren ($N \times 1$-Matrizen)

$$\underset{\sim}{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \quad , \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

a) Ein Skalarprodukt $\langle \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \rangle$ in $\mathbb{C}^N$ ist definiert durch das Matrixprodukt $\underset{\sim}{a}^\dagger \underset{\sim}{b}$, wobei $\underset{\sim}{a}^\dagger = (\underset{\sim}{a}^\top)^*$ die zu $\underset{\sim}{a}$ transponierte und komplex-konjugierte $1 \times N$-Matrix (Zeilenvektor) ist. Schreiben Sie dieses Skalarprodukt in Komponenten aus und verifizieren Sie die Eigenschaften:

(i) $\langle \underset{\sim}{a}, \gamma_1 \underset{\sim}{b}_1 + \gamma_2 \underset{\sim}{b}_2 \rangle = \gamma_1 \langle \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}_1 \rangle + \gamma_2 \langle \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}_2 \rangle$
$\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}_1, \underset{\sim}{b}_2 \in \mathbb{C}^N, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ (Linearität)

(ii) $\langle \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \rangle = (\langle \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{a} \rangle)^*$ (Symmetrie bis auf Komplex-Konjugation)

(iii) $||\underset{\sim}{a}||^2 := \langle \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a} \rangle$ ist positiv reell (≥ 0),
wobei $\langle \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underset{\sim}{a} = 0$ (positiv und nicht entartet)

Zeigen Sie, dass aus (i) und (ii) folgt:
$\langle \gamma_1 \underset{\sim}{b}_1 + \gamma_2 \underset{\sim}{b}_2, \underset{\sim}{a} \rangle = \gamma_1^* \langle \underset{\sim}{b}_1, \underset{\sim}{a} \rangle + \gamma_2^* \langle \underset{\sim}{b}_2, \underset{\sim}{a} \rangle$ (Antilinearität)

b) Es sei A ein Endomorphismus von $\mathbb{C}^N$, d.h. eine $N \times N$-Matrix (α_{ij}) mit Einträgen aus $\mathbb{C}$. Ein Endomorphismus heißt zu A adjungiert (Schreibweise: $A^\dagger$), wenn gilt:

$$\langle A^\dagger \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \rangle = \langle \underset{\sim}{a}, A \underset{\sim}{b} \rangle \qquad \forall \;\; \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \mathbb{C}^N.$$

Geben Sie die Elemente der Matrix von $A^\dagger$ an. Ist $A^\dagger$ eindeutig bestimmt ?

c) Ein Endomorphismus A von $\mathbb{C}^N$ heißt *hermitisch* oder *selbstadjungiert*, wenn $A^\dagger = A$ gilt. Zeigen Sie: Ist $\underset{\sim}{a} \in \mathbb{C}^N$ ein „Eigenvektor" des hermitischen Endomorphismus A mit Eigenwert λ, d.h. gilt $A\underset{\sim}{a} = \lambda \underset{\sim}{a}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$, dann ist sogar schon $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. ***Eigenwerte hermitischer Endomorphismen sind reell.***
(Zusatzfrage: Ist dann auch sofort $\underset{\sim}{a} \in \mathbb{R}^N$?)