Übungsaufgaben zu Physik IV (SS 97)

Blatt 6

Aufgabe 6.1 (L:7;D:7): Plancksche Strahlungsformel

Gegeben sei ein Hohlraumstrahler, der auf die Temperatur T gebracht wird. Bilden Sie das Verhältnis der Raten für spontane und induzierte Emission. Welcher Prozess dominiert?

Aufgabe 6.2 (L:10): Bindungsenergie I

Wenn ein Chlor-Atom ein Elektron bindet (Cl^-), wird eine Energie von $3,61\ eV$ frei. Die Ionisationsenergie von Natrium (Na) ist $5,14\ eV$. Eine empirische Formel, die die Ionenbindung recht gut beschreibt, ist durch

$$V(r) = -\tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} + \frac{b}{r^9}$$

gegeben ($b > 0$). Berechnen Sie mit diesem Potential den Gleichgewichtsabstand und die Bindungsenergie eines Moleküles (Nullpunktsschwingung vernachlässigt). Berechnen Sie damit dann die „Dissoziationsenergie“ des Na^+Cl^--Moleküls in *Neutral*teilchen, wenn der Gleichgewichtsabstand des Ionenmoleküls $0,236\ nm$ beträgt.

Aufgabe 6.3 (L:0;D:0): Bindungsenergie II

Die potentielle Energie eines zweiatomigen Moleküls ist in guter Näherung durch ein Morse-Potential

$$V(r) = V_0\left[1 - e^{-\beta(r-r_0)}\right]^2 - V_0$$

mit $V_0 > 0$ und $b > 0$ beschrieben. Sei μ die reduzierte Masse dieses Moleküls. Bestimmen Sie die Schwingungsniveaus für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage und die Dissoziationsenergie. *Hinweis:* Entwickeln sie die potentielle Energie um den Gleichgewichtsabstand bis zur zweiten Ordnung einschließlich (harmonische Näherung).

Aufgabe 6.4 (L:0): Kernpotential

Schätzen Sie die kinetische Energie eines Nukleons innerhalb eines typischen Kerns ab und folgern Sie daraus die Größenordnung der Tiefe V_0 des Kernpotentialtopfes. *Hinweis:* Nehmen Sie an, dass das Nukleon in einem Potentialkasten der Tiefe V_0 und der „Breite“ $\Delta r \approx 10^{-15}\ m$ gebunden ist.

Aufgabe 6.5 (D:0): Geschwindigkeit des Ortsmittelwertes

Der Erwartungswert (statistischer Mittelwert) des Teilchenortes $\vec{x}$ wurde in der Vorlesung und in Aufgabe 5.5c) eingeführt als

$$\langle\vec{x}\rangle_t = \int d^3x\ \vec{x}\ P(\vec{x},t)$$

mit $P = |\psi|^2$ = Aufenthalts-Wahrscheinlichkeitsdichte. Leiten Sie durch Anwendung der Kontinuitätsgleichung für den Wahrscheinlichkeitsstrom $\vec{\jmath}(\vec{x},t)$ einen allgemeinen Ausdruck für $\frac{d\langle\vec{x}\rangle_t}{dt}$, das heißt für die Wanderungsgeschwindigkeit des mittleren Teilchenortes her und schreiben Sie das Ergebnis wiederum als Erwartungswert eines Operators. Die Wellenfunktion ist dabei als für $|\vec{x}| \to \infty$ schnell abfallend anzunehmen (wichtig für „Randterme“).

Aufgabe 6.6 (D:21): Erwartungswerte und Schwankungen

Für das eindimensionale Gaußsche Wellenpaket

$$\psi(x) = \sqrt[4]{\tfrac{a}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\gamma(t)}}\exp\left\{ i[k_0\,x-\omega(k_0)\,t] - \tfrac{1}{2}\frac{\left(x-\frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{\gamma(t)}\right\}$$

mit

$$\omega(k_0) = \tfrac{\hbar k_0^2}{2m},$$
$$\gamma(t) = a + i\tfrac{\hbar}{m}t,$$
$$a, k_0 \in \mathbb{R}$$

sind folgende Größen zu berechnen:

a) Die mittlere quadratische Schwankung $(\Delta x)^2$ des Ortes x. *Hinweis:* Siehe auch Aufgaben 4.1 und 5.5.

b) Der Erwartungswert $\langle p\rangle_t$ des Impulses durch Rechnung im Ortsraum.

c) Die Impulsraum-Wellenfunktion $\varphi(p,t)$ (sie kann auch aus der in der Vorlesung benutzten Fourier-Amplitude $g(k)$ erschlossen werden).

d) Der Erwartungswert und die quadratische Schwankung des Impulses durch Rechnung im Impulsraum.

Hilfsformel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\,x^2 + B\,x\right)\,dx = \sqrt{\tfrac{\pi}{A}}\exp\left(\tfrac{B^2}{4A}\right); \quad \Re(a) > 0$$

Die übrigen benötigten Integrale lassen sich hieraus durch Differenzieren nach A und B gewinnen.