Übungsaufgaben zu Physik IV (SS 97)

Blatt 5

Aufgabe 5.1 (L:7;D:0): Spin-Bahn-Kopplung I

Beim Übergang $4p$ in den Grundzustand $4s$ emittiert das Kaliumatom Photonen der Wellenlänge $766,41\ nm$ ($4p_{\frac{3}{2}} \to 4s$) bzw. $769,90\ nm$ ($4p_{\frac{1}{2}} \to 4s$). Schätzen Sie die Stärke des inneratomaren Magnetfeldes ab, das ein $4p$-Elektron im Kaliumatom auf Grund der Spin-Bahn-Wechselwirkung erfährt.

Aufgabe 5.2 (L:0): Spin-Bahn-Kopplung II

Für welche der nachstehend genannten Elemente erwarten Sie, dass der Grundzustand auf Grund der Spin-Bahn-Wechselwirkung aufgespalten ist: Li, B, Na, Ar, Cu, Ga, Ag?

Aufgabe 5.3 (L:0): Erzeugung von Röntgenstrahlung

An einer Röntgen-Röhre (mit einer Anode aus Wolfram) liegt eine Spannung von $U = 200\ kV$. Wie groß sind die Geschwindigkeit v, der Impuls p und die de-Broglie-Wellenlänge λ der Elektronen beim Auftreffen auf die Anode? Wie groß ist die Grenzwellenlänge des emittierten Röntgen-Bremsspektrums? Berechnen Sie allgemein die Abhängigkeit des Verhältnisses λ_{gr}/λ von $\beta = v/c$. Was ergibt sich im Limes $\beta \to 1$? (Hinweis: Sie müssen durchweg relativistisch rechnen.)

Aufgabe 5.4 (L:15;D:15): Moseleysches Gesetz

Eine Röntgen-Röhre enthält eine Molybdän-Anode ($Z = 42$) und wird mit einer Spannung $U = 30\ kV$ betrieben. Die K$_\alpha$-Linie wird zu $0,0721\ nm$ *gemessen*. Welche Wellenlänge ergibt sich nach dem Moseleyschen Gesetz für die emittierte Strahlung? Können die 30-kV-Elektronen diese Linie anregen? Die Strahlung durchläuft ein Zirkon-Filter ($Z = 40$). Berechnen Sie die Lage der K-Kante dieses Filters und zeigen Sie, dass es die K_α-Linie von Molybdän durchlässt. Die K_α-Strahlung von Molybdän trifft schließlich auf ein Aluminium-Blech von $1\ mm$ Dicke, wobei 78% der Strahlung absorbiert wird. Wie groß ist der Röntgen-Absorptionsquerschnitt? Die Dichte von Aluminium ist $\rho = 2,7\ kg/dm^3$, die relative Atommasse $26,98\ amu$.

Aufgabe 5.5 (D:15): Aufenthalts-Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Aufenthalts-Wahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens der Masse m sei gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
P(\vec{x},t) &= [\sqrt{\pi}\, a(t)]^{-3} \exp\left\{-\left[\frac{\vec{x}-\vec{v}_0 t}{a(t)}\right]^2\right\} \\
&\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^3, \\
&a(t) = a_0\sqrt{1+\left(\frac{\hbar}{m\,a_0}\right)^2 t^2}, \\
&a_0 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

a) Überprüfen Sie, ob dies eine zulässige, das heißt überall positive und normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. *Hinweis:*

$$\int d^3x \, \exp(-A\,\vec{x}^2) = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

b) Welches ist der wahrscheinlichste Aufenthaltsort $\vec{x}_W$ des durch diese Verteilung beschriebenen Teilchens?

c) Berechnen Sie den dieser Verteilung entsprechenden „statistischen Mittelwert des Ortes", das heißt die Summe bzw. das Integral über alle möglichen Orte $\vec{x}$ mit der Verteilung P als Gewichtsfunktion:

$$\langle\vec{x}\rangle_t = \int d^3x \, \vec{x} \, P(\vec{x},t).$$

Hinweis: Das auftretende Integral ist durch eine geeignete Substitution fast ohne Rechnung auf das von Teil a) zurückführbar.

Aufgabe 5.6 (D:0): Schrödinger-Gleichung

Die Wellenfunktion eines Teilchens der Masse m sei gegeben durch

$$\psi(\vec{x},t) = (\pi\, b)^{-\frac{1}{4}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{r}{b}\right)^2 + i\,\tfrac{3\,\hbar}{m\,b^2}t\right]\right\}$$

$$r = |\vec{x}|, \ \frac{b}{1\text{m}} \in \mathbb{R}, \ [b] = 1\text{m}.$$

Bestimmen Sie durch Anwendung der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = \left[\frac{1}{2m}\left(\tfrac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)^2 + V(\vec{x})\right]\psi(\vec{x},t)$$

das Potential $V(\vec{x})$, in welchem sich dieses Teilchen bewegt. Welches aus der klassischen Mechanik bekannte Kraftfeld gehört zu diesem Potential?