Übungsaufgaben zu Physik IV (SS 97)

Blatt 4

Aufgabe 4.1 (L:15;D:15): Unschärferelation

Begründen Sie mit Hilfe der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation $\Delta r \cdot \Delta p_r \geq \frac{\hbar}{2}$, dass es einen tiefsten Zustand im H-Atom gibt. *Hinweis:* Nehmen Sie an, dass Δr und Δp_r durch r respektive p_r gegeben sind.
Gibt es etwas Entsprechendes beim harmonischen Oszillator? Was folgt hieraus für die Nullpunktschwankungen des Oszillators? *Hinweis:* Argumentieren Sie in diesem Fall etwas genauer und benutzen Sie für das Schwankungsquadrat der Variablen $\xi \in \{x, p\}$: $(\Delta\xi)^2 = \langle(\xi - \langle\xi\rangle)^2\rangle$, wobei „$\langle \dots \rangle$“ die klassischen zeitlichen Mittelwerte der oszillatorischen Bewegung über eine Periode sind.

Aufgabe 4.2 (L:9): Wasserstoffähnliche Systeme

Wie groß ist das Verhältnis von elektrostatischer Kraft und Gravitationskraft im H-Atom? Betrachten Sie das System Sonne/Erde als Quantensystem im Bohrschen Modell: Wie groß ist der Bohrsche Radius dieses Systems? In welchem „Quantenzustand“ (Quantenzahl n) befindet sich die Erde? ($M_S = 1,98 \cdot 10^{30}\ kg$, $M_E = 5,97 \cdot 10^{24}\ kg$)

Aufgabe 4.3 (L:0;D:0): Serien-Spektren

Wie groß ist die Wellenlänge der Strahlung, die im He^+ den Zustand mit $n = 3$ vom Grundzustand aus anregen kann? Gibt es im He^+ eine Serie, die praktisch identisch mit der Balmer-Serie im H-Atom ist?

Aufgabe 4.4 (L:0): Bohr-Sommerfeld-Modell

In der Frühzeit des Bohr-Sommerfeld-Modells hatte man Probleme mit den Drehimpulsquantenzahlen. Was ergibt das Sommerfeldsche Umlaufintegral J_r für Kreisbahnen? Welche Werte durften in diesem Fall die Quantenzahlen n_φ und n_ϑ annehmen? Was bedeutet dies physikalisch? Nach Einführung der Ellipsen wollte man die „schlankeste“ Ellipse, die „Pendelbahn“ mit Drehimpuls Null, ausschließen. Wie muss man für eine gegebene Hauptquantenzahl n die Quantenbedingungen für die drei Sommerfeldschen Umlaufintegrale formulieren, wenn man Pendelbahnen zulässt?

Aufgabe 4.5 (D:0): Runge-Lenz-Vektor

Für das Kepler-Problem, das heisst das System mit der Hamilton-Funktion $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$, $V(r) = \gamma\frac{1}{r}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, ist außer dem Drehimpuls $\vec{l}$ auch der Runge-Lenz-Vektor

$$\vec{A} := \vec{p} \times \vec{l} + m\gamma\frac{\vec{x}}{r}, \qquad r = |\vec{x}|$$

eine Konstante der Bewegung. Zeigen Sie dies in folgenden Schritten:

a) Berechnen Sie die Poisson-Klammern

$$(i) \quad \{\vec{p}^2, p_l l_m\} \qquad \text{und} \qquad (ii) \quad \{\tfrac{1}{r}, p_l l_m\}$$

unter Benutzung des Resultats aus der Vorlesung, dass $\{\vec{p}^2, l_m\} = 0$ und $\{f(r), l_m\} = 0$ für beliebiges $f(r)$ und $m \in \{1, 2, 3\}$.

b) Berechnen Sie die Poisson-Klammer

$$\{\vec{p}^2, \tfrac{x_k}{r}\}.$$

c) Wiederholen und benutzen Sie die Darstellung des Vektorproduktes

$$\left(\vec{p} \times \vec{l}\right)_k = \sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{klm} p_l l_m$$

mittels des vollständig antisymmetrischen ε-Tensors. Berechnen Sie damit und mit den Resultaten aus a) und b) die Poisson-Klammern $\{A_k, H\}$.

Hinweis: Benutzen Sie durchweg die in der Vorlesung besprochenen Eigenschaften der Poisson-Klammern.

Aufgabe 4.6 (D:16): Wellenpakete und Unschärferelation

a) Wiederholen Sie die Fourier-Transformation samt ihrer Umkehrung und die Fourier-Darstellung der δ-Distribution.

b) Berechnen Sie die Wellenpakete

$$\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int d^n k \, g(k) \, e^{i\, k \cdot x}$$

in einer Dimension ($n = 1$) zu den Impulsspektren

$$g_1(k) = C_1 \cdot \begin{cases} 1 & -\alpha \leq k \leq \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$g_2(k) = \frac{C_2}{k^2 + \alpha^2}$$
$$C_1, C_2, \alpha \in \mathbb{R}$$

c) Berechnen Sie in drei Dimensionen ($n = 3$) das Wellenpaket, welches das Impulsspektrum

$$g_3(k) = \frac{C_3}{(|\vec{k}|^2 + \alpha^2)^2}$$
$$C_3, \alpha \in \mathbb{R}$$

besitzt. *Hinweis:* Benutzen Sie Polarkoordinaten und führen Sie das Radialintegral durch partielle Integration auf das bei $g_2(k)$ aufgetretene Integral zurück.

d) Definieren Sie in allen drei Fällen geeignete Maße Δk und Δx für die Breite im k- und x-Raum (zum Beispiel die Halbwertsbreite, die Breite bei $1/e$-tel des Maximalwertes, ...) und berechnen Sie jeweils $\Delta x \cdot \Delta k$.