Übungsaufgaben zu Physik IV (SS 97)

Blatt 3

Aufgabe 3.1 (L:0;D:0): Streuung an Atomkernen

Ein α-Teilchen nähert sich in einem zentralen Stoß einem Goldatom (Kernladung Z = 79) nach dem Thomsonschen Modell, d.h. die positive Ladung des Atoms sei über eine Kugel vom Radius $r_{\mathrm{Au}} \approx 2 \cdot 10^{-10}\ m$ homogen verteilt. Kann ein solches Atom ein α-Teilchen mit der Energie 1 MeV „zurückstreuen“ ($\vartheta = \pi$)?

Aufgabe 3.2 (L:0): Rutherford-Streuung

Ein Strahl von α-Teilchen der Energie 9 MeV wird an einer dünnen Folie aus Aluminium (Z = 13) gestreut. Erwarten Sie Abweichungen von der Rutherford-Formel? Sind Quanteneffekte zu erwarten? Was können Sie über die Gültigkeit der Rutherford-Formel bei sehr kleinen Ablenkwinkeln sagen?

Aufgabe 3.3 (L:10;D:10): Strahlung schwarzer Körper

Ermitteln Sie aus dem Planckschen Strahlungsgesetz die Konstante des Wienschen Verschiebungsgesetzes. Das Maximum der spektralen Energiedichte der Sonnenstrahlung liegt bei 510 nm. Welche Temperatur ergibt sich hieraus für die Sonnenoberfläche, wenn man diese als schwarzen Körper betrachtet? Ist das Ergebnis im Einklang mit der beobachteten extraterrestrischen Solarkonstante von $1,35\ kW/m^2$?

Aufgabe 3.4 (L:9): Compton-Streuung

Röntgenstrahlung der Energie 50 keV wird beim Compton-Effekt um 90° gestreut. Wie groß ist die Energie der gestreuten Photonen? Welche Energie und welchen Impuls besitzen die Compton-Elektronen, wenn sie vor dem Stoß in Ruhe waren? Unter welchem Winkel bewegen sich die Elektronen nach dem Streuvorgang?

Aufgabe 3.5 (D:0): Legendre-Transformation

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f_1(x) = \exp(a\,x) \qquad\qquad f_2(x) = \exp\left(a\,(x+c)\right)$$
$$a, c \in \mathbb{R}$$

beim einfachen Umschreiben $f_i(x) \mapsto h_i(z) := f_i(x(z))$ auf die jeweils durch $z = \frac{df_i}{dx}$ definierte neue Variable dieselbe Funktion $h(z)$ ergeben, das heißt dass diese Art der Transformation nicht eindeutig umkehrbar ist.

b) Berechnen Sie die Legendre-Trannsformierten $g_i(z) = (\mathcal{L}f_i)(z)$ von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ und verifizieren Sie die Eigenschaft $\frac{dg_i}{dz} = x(z)$.

c) Für welchen Wert der reellen Konstanten α ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha$ ein „Fixpunkt“ der Transformation $\mathcal{L}$, das heißt die Transformierte $g = \mathcal{L}f$ von derselben funktionalen Form wie f?

Aufgabe 3.6 (D:21): Massenpunkt im Zentralfeld im Rahmen des Hamilton-Formalismus

Die Bewegung eines Massenpunktes der Masse m im konservativen Zentralkraftfeld mit Potential $V = V(r)$ werde in Kugelkoordinaten $\underset{\sim}{q} = \{r, \vartheta, \varphi\}$ beschrieben.

a) Stellen Sie die Transformationsgleichungen $\vec{x} = \vec{x}(\underset{\sim}{q})$ und $\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}})$ auf, bilden Sie die Lagrange-Funktion $L(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{\dot{q}})$ und berechnen Sie die kanonisch konjugierten Impulse $p = \{p_r, p_\vartheta, p_\varphi\}$.

b) Berechnen Sie die Hamilton-Funktion $H(\underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q})$.

c) Stellen Sie die sechs kanonischen Bewegungsgleichungen auf.

d) Die Gleichung für $\dot{p}_\varphi$ liefert sofort eine Erhaltungsgröße, deren Wert l_3 genannt sei. Zeigen Sie, dass auf Grund der Gleichungen für $\dot{p}_\vartheta$ und $\dot{\vartheta}$ auch die Kombination

$$p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\vartheta)} =: l^2$$

eine Konstante der Bewegung ist.

e) Vereinfachen Sie die „radialen“ kanonischen Gleichungen und die Hamilton-Funktion durch Benutzung der Erhaltungsgrößen l_3, l^2.