Übungen zu Physik IV (SS 2002)

(G. Münster / T. Peitzmann)

Blatt 2

Aufgabe 6 (L:0;D:4): Wellenpakete und Unschärferelation

a) Berechnen Sie das Wellenpaket in einer Dimension

$$\psi(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\varphi(k)\,e^{i\,k\cdot x - i\omega t} \qquad \text{mit} \qquad \varphi(k) = \begin{cases} 1 & k_0 - \alpha \le k \le k_0 + \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Entwickeln Sie dazu die Dispersionsrelation in eine Taylorreihe um k_0 bis zum linearen Glied:

$$\omega(k) = \omega_0 + v_0(k - k_0)$$

b) Berechnen Sie das eindimensionale Wellenpaket

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\varphi(k)\,e^{i\,k\cdot x} \qquad \text{mit} \qquad \varphi(k) = \frac{1}{k^2 + \alpha^2}$$

c) Berechnen Sie in drei Dimensionen dasjenige Wellenpaket, welches die Impulsraum-Wellenfunktion

$$\varphi(\vec{k}) = \frac{1}{(|\vec{k}|^2 + \alpha^2)^2}$$

besitzt. *Hinweis:* Benutzen Sie Polarkoordinaten und führen Sie das Radialintegral durch partielle Integration auf das in b) aufgetretene Integral zurück.

d) Definieren Sie in allen drei Fällen geeignete Maße Δk und Δx für die Breite im k- und x-Raum (zum Beispiel die Halbwertsbreite, die Breite bei $1/e$-tel des Maximalwertes, ...) und berechnen Sie jeweils $\Delta x \cdot \Delta k$.

Aufgabe 7 (L:5;D:5): Compton-Effekt

a) Leiten Sie eine Gleichung für die Energieänderung $\Delta E = E - E'$ des Photons bei der Compton-Streuung ab. Für welchen Winkel tritt die maximale Energieänderung auf? Was passiert mit $\Delta E/E$ für die Grenzfälle sehr großer bzw. sehr kleiner Photonenenergien? Bei welcher Photonenenergie und Wellenlänge wird $\Delta E/E = 0.5$?

b) Wie läßt sich die Compton-Streuung zwischen einem Photon und einem Elektron, das sich auf das Photon zubewegt, beschreiben? Geben Sie eine Gleichung für die Wellenlängenverschiebung an für den Fall, dass $\theta = 180°$ ist. Was passiert in den Grenzfällen sehr kleiner oder sehr großer Geschwindigkeit des Elektrons?

Aufgabe 8 (L:0;D:4): Erwartungswerte und Schwankungen

Für das eindimensionale Gaußsche Wellenpaket

$$\psi(x) \quad = \quad \sqrt[4]{\tfrac{2d^2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\gamma(t)}}\exp\left\{ i[k_0\,x - \omega(k_0)\,t] - \tfrac{1}{2}\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{\gamma(t)} \right\}$$
$$\text{mit} \quad \omega(k_0) = \tfrac{\hbar k_0^2}{2m}, \;\; \gamma(t) = 2d^2 + i\frac{\hbar}{m}t \quad \text{und} \quad d, k_0 \in \mathbb{R}.$$

sind folgende Größen zu berechnen:

a) Die mittlere quadratische Schwankung $(\Delta x)^2$ des Ortes x.

b) Der Erwartungswert $\langle p \rangle_t$ des Impulses durch Rechnung im Ortsraum.

c) Die Impulsraum-Wellenfunktion $\tilde{\psi}(k,t)$. Diese kann aus den in der Vorlesung benutzten Formeln zum Gaußschen Wellenpaket erschlossen werden.

d) Der Erwartungswert und die quadratische Schwankung des Impulses durch Rechnung im Impulsraum.

Hilfsformel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\,x^2 + B\,x\right)\,dx = \sqrt{\tfrac{\pi}{A}}\exp\left(\tfrac{B^2}{4A}\right), \quad \mathrm{Re}(A) > 0.$$

Die übrigen benötigten Integrale lassen sich hieraus durch Differenzieren nach A und B gewinnen.

Aufgabe 9 (L:3;D:3): Compton-Effekt und kosmische Hintergrundstrahlung

a) Der Weltraum ist angefüllt von einer elektromagnetischen Strahlung, die eine spektrale Verteilung besitzt wie Hohlraumstrahlung bei einer Temperatur $T = 3\,\mathrm{K}$ (die sogenannte kosmische Hintergrundstrahlung). Bei welcher Wellenlänge liegt das Maximum der Intensität? Welcher Photonenenergie entspricht das?

b) Ein Proton (Achtung: $m_p = 938\,\mathrm{MeV}/c^2$) bewege sich durch den Weltraum mit einer Energie von $E_p = 1\,\mathrm{TeV} = 10^{12}\,\mathrm{eV}$. Betrachten Sie Streuprozesse dieses Protons mit den Photonen der Hintergrundstrahlung. Wie groß ist der Energieverlust des Protons bei Streuung des Photons um $\theta = 180°$? Vergleichen Sie die Photonenenergien vor und nach dem Stoß und nähern Sie.