Übungen zur Physik III (WS 1999/2000)

Blatt 4

Aufgabe 4.1 (): Greensche Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators

Im zweiten Semester haben Sie die δ-Distribution kennengelernt (Aufg. 2.3 ff., 3.2, 5.4). In der Physik modelliert man mit ihr punktförmige Objekte. Andererseits kommt sie auch bei der Berechnung „Greenscher Funktionen" vor. Wenn man eine lineare Differenzialgleichung mit Differenzialoperator D hat, so ist die Greensche Funktion g diejenige Distribution, die

$$Dg = \delta$$

erfüllt. In vielen Fällen ist g tatsächlich eine Funktion. Betrachtet man ein System, das von der Zeit abhängt, so beschreibt g die Reaktion des Systems auf einen momentanen Stoß. Ein anderes Beispiel kennen Sie schon, die elektrische Punktladung. Die Poisson-Gleichung lautet $\Delta\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$. Setzt man für ρ die Dichte einer Punktladung ein, hat man

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\vec{r})$$

mit $\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$. In diesem Fall ist also $D = -\frac{\epsilon_0}{q}\Delta$.

a) Wie lautet die Differenzialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators? Wie lautet die inhomogene Differenzialgleichung mit äußerer Kraft $F(t)$?

b) Die Lösung der homogenen Gleichung haben Sie schon kennengelernt. Wie lautet die Lösung im Schwingfall mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$? Überlegen Sie sich physikalisch, warum dies die Reaktion des Systems auf einen kurzen Stoß bei $t = 0$ ist! m.a.W., setzen Sie $v_0 = 1$ und Sie haben die Greensche Funktion des harmonischen gedämpften Oszillators berechnet. Zeichnen Sie diese Funktion! Hat Sie Unstetigkeitsstellen bzw. Stellen, an denen Sie nicht beliebig häufig differenzierbar ist?

c) Mit Hilfe Greenscher Funktionen kann man Lösungen der inhomogenen Gleichung finden. Angenommen, Sie kennen die Greensche Funktion zum harmonischen Oszillator. Dann ist

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')f(t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} (Dg)(t-t')f(t')dt' = D\int_{-\infty}^{\infty} g(t-t')f(t')dt'.$$

d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} g(t-t')f(t')dt'$ ist die gesuchte Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (Vergleichen Sie dies mit der Lösung der Poissongleichung für beliebiges ρ!). Verifizieren Sie die Gleichung noch einmal mathematisch, indem Sie

$$D\int_{-\infty}^{\infty} g(t-t')f(t')dt'$$

berechnen!

Aufgabe 4.2 (): Fourierreihe

Berechnen Sie die Fourierreihe der Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} -1 & : \quad -\pi \le x \le -\frac{\pi}{2} \\ 1 & : \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -1 & : \quad \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases} .$$

Aufgabe 4.3 (20 Punkte): Kugelwellen

Ausbreitung einer Störung eines punktförmigen Erregers in einem dreidimensionalen, elastischen, isotropen Medium. Durch

$$\psi(\vec{r}, t) = f(r) \sin(\omega t - kr)$$

ist die reelle Darstellung einer Kugelwelle mit dem Ursprung als Zentrum gegeben.

a) Untersuchen Sie, für welche Amplitudenfunktionen $f(r)$ die Kugelwelle $\psi(\vec{r}, t)$ eine Lösung der freien Wellengleichung

$$\Delta\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

ist, und berechnen Sie die Dispersionsrelation $v(\omega, k)$. (Benutzen Sie den Laplace-Operator aus Aufgabe 5.1 des Sommersemesters)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \cdots$$

b) Zeigen Sie nochmals das Ergebnis für $f(r)$ aus a), indem Sie physikalisch argumentieren: Berechnen Sie dafür die zeitlich gemittelte Energiedichte der Welle $\bar{w}(\vec{r})$, indem Sie den kinetischen und den potentiellen Anteil berechnen. Berechnen Sie eine Bedingung für $f(r)$, indem Sie die Erwartung einbringen, daß sich die im Erregerzentrum erzeugte Energie gleichmäßig im Raum ausbreitet, und daher durch alle Kugeloberflächen pro Zeit die gleiche Energie fließt.

Viel Erfolg!

(Physik III im Netz: `http://pauli.uni-muenster.de/~schnetm/physik3.html`. Abgabe der Lösungen nächsten Mittwoch zwischen 10^{00} und 12^{30} im Kasten vor Raum 406, Institut für theoretische Physik 1.)