Übungen zur Physik II (SS 99)

Blatt 9

Aufgabe 9.1 (): Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens kann man aus einer Menge linear unabhängiger Vektoren, die einen Vektorraum aufspannen, eine Orthonormalbasis gewinnen. Benutzen Sie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren, um je die Vektoren in den Mengen

a)

$$\left\{ \vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

b)

$$\left\{ \vec{w}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{w}_3 := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

zu orthonormalisieren.
Erinnerung: Man normiert einen Vektor $\vec{v}$ durch $\vec{e}_v := \frac{\vec{v}}{v}$. Hat man zwei Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, so erhält man den Teil von $\vec{v}_2$, der orthogonal zu $\vec{v}_1$ ist durch

$$\vec{v}_2^{\perp} := \vec{v}_2 - \frac{1}{v_1^2}(\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 ,$$

denn

$$\vec{v}_2^{\perp} \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 - \frac{1}{v_1^2}(\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 - \frac{1}{v_1^2}(\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1^2 = 0 .$$

Man bekommt also mit $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2^{\perp}$ zwei orthogonale Vektoren, die noch zu normieren sind. Für drei Vektoren geht dies analog, nur muß man von $\vec{v}_3$ nun erst den Anteil von $\vec{v}_2$ wie oben und dann noch den Anteil von $\vec{v}_3$ abziehen.

Aufgabe 9.2 (): Orthonormalisierung von Funktionen

In Aufgabe 8.2 haben Sie orthogonale Funktionen kennengelern. Die Analogie zu Vektoren geht noch weiter. Man kann das Integral, das dort eingeführt wurde,

$$\int_a^b u_n(x) u_m^*(x) dx$$

als Skalarprodukt von zwei Funktionen auffassen. Statt $f \cdot g$ schreibt man für zwei Funktionen f und g

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

und die Norm einer Funktion ist genau wie bei Vektoren durch die Wurzel aus dem Skalarprodukt mit sich selbst gegeben:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} .$$

Betrachten Sie die Funktionen p_0, p_1 und p_2 auf dem Intervall $[-1, 1]$ mit

$$p_0(x) = 1 , \quad p_1(x) = x \text{ und } p_2(x) = x^2 .$$

Orthonormalisieren Sie diese Funktionen mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens.

Aufgabe 9.3 (HA 10): Satz von Stokes

Analog zu Aufgabe 4.3 zeigen Sie, daß man den Satz von Stokes benutzen kann, um folgende Folgerungen zu ziehen.

a)

$$\oint_C \varphi d\vec{r} = \int_{F_C} d\vec{F} \times \mathrm{grad}\varphi$$

b)

$$\oint_C d\vec{r} \times \vec{A} = \int_{F_C} (d\vec{F} \times \nabla) \times \vec{A}$$

Aufgabe 9.4 (): Stetigkeit in 2 Variablen

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \frac{x}{x+y} \text{ für } (x,y) \neq (0,0)$$

und $f(0,0) := 1$. Angenommen, Sie machen sich über die Ergänzung in $(0,0)$ zunächst keine Gedanken und berechnen die partiellen Ableitungen nach x und y. Sind diese Ableitungen überall definiert und stetig? Wo gibt es Probleme und von welcher Art sind sie? Was sagt ihnen dies über die ursprüngliche Funktion f?

Aufgabe 9.5 (): Existenz von Potentialen

Für die Untersuchung, ob zu einem Vektorfeld mit $\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{0}$ ein Potential existiert, muß man feststellen, ob der Raum einfach zusammenhängend ist. (vgl. Aufgabe 12.2 aus dem Wintersemester) Welcher der folgenden Räume ist einfach zusammenhängend? Begründen Sie ihre Antwort!

a) Das Innere eine Ellipsoides

b) Das Innere eines unendlich langen Zylinders

c) Das Äußere eines unendlich langen Zylinders

d) Eine 5-Zimmer-Wohnung

e) Die Oberfläche der Erde

f) Der Innenhof eines Klosters mit Kreuzgang darum herum, der durch N Säulen zum Garten begrenzt ist

g) Das Äußere zweier Kugeln bei verschiedener Lage zueinander

Aufgabe 9.6 (HA 15): Messung des $\vec{B}$-Feldes mittels der Lorentz-Kraft

Ein geladenes Teilchen (Ladung Q) wird an einem Ort, an dem kein elektrisches, wohl aber ein magnetisches Feld vermutet wird, nacheinander mit den zwei verschiedenen Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ bewegt und die dabei auf das Teilchen wirkenden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gemessen.

Bestimmen Sie das magnetische Feld aus den Ausdrücken $\vec{F}_i = Q(\vec{v}_i \times \vec{B})(i \in \{1,2\})$ mit Hilfe des Ansatzes

$$\vec{B} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \ .$$

Warum genügt nicht eine einzige Messung?

Viel Erfolg!

(Physik II im Netz: `http://pauli.uni-muenster.de/~schnetm/physik2.html`)